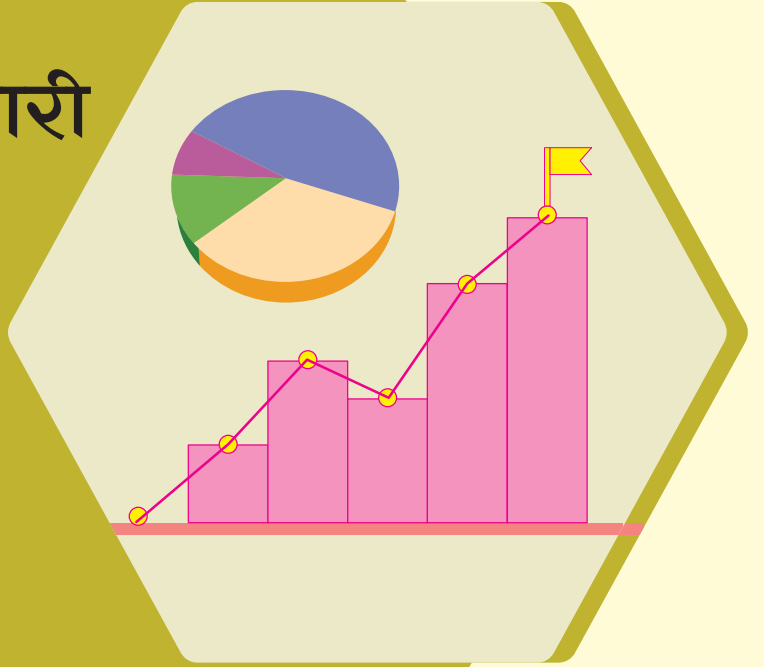


इयत्ता दहावी पुरवणी परीक्षा तयारी

विषय - गणित
(भाग 1 व 2)



राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.

इयत्ता दहावी
पुरवणी परीक्षा तयारी

विषय – गणित
(भाग 1 व 2)



राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.

इयत्ता दहावी पुरवणी परीक्षा तयारी : विषय गणित (भाग 1 व 2)

- प्रवर्तक : शालेय शिक्षण व क्रीडा विभाग, महाराष्ट्र शासन
- प्रकाशक : राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- प्रेरणा : मा. आय. ए. कुंदन (भा.प्र.से.)
प्रधान सचिव, शालेय शिक्षण व क्रीडा विभाग, महाराष्ट्र राज्य.
- मार्गदर्शन : मा. सूरज मांडरे (भा.प्र.से.)
आयुक्त (शिक्षण), महाराष्ट्र राज्य, पुणे.
मा. प्रदिपकुमार डांगे (भा.प्र.से.)
राज्य प्रकल्प संचालक, महाराष्ट्र प्राथमिक शिक्षण परिषद, मुंबई.
- संपादक : मा. राहूल रेखावार (भा.प्र.से.)
संचालक, राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- सहसंपादक : डॉ. शोभा खंदारे
सहसंचालक, राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- कार्यकारी संपादक : डॉ. कमलादेवी आवटे
उपसंचालक, समन्वय व समता विभाग,
राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- संपादन साहाय्य : श्रीम. मनिषा यादव
उपविभागप्रमुख, गणित विभाग, राज्य शैक्षणिक संशोधन व
प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
: श्रीम. वृषाली गायकवाड
अधिव्याख्याता, गणित विभाग, राज्य शैक्षणिक संशोधन व
प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- प्रथम आवृत्ती : मार्च २०२४
- अर्थसाहाय्य : समग्र शिक्षा, महाराष्ट्र प्राथमिक शिक्षण परिषद, मुंबई.
- मुद्रक : रुना ग्राफिक्स, पुणे.
- सर्व हक्क प्रकाशकाच्या स्वाधीन.

प्रस्तावना

विद्यार्थ्यांच्या शैक्षणिक वाटचालीतील दहावी आणि बारावीच्या परीक्षा हा एक महत्त्वपूर्ण टप्पा मानला जातो. कारण इयत्ता दहावीच्या आणि बारावीच्या निकालानंतरच करिअर निवडीस व पुढील उच्च शिक्षणासाठी कोणत्या शाखेला प्रवेश घ्यायचा याची दिशा ठरत असते. त्यामुळे दहावीचा निकाल विद्यार्थी, शिक्षक, पालक आणि शाळा यांच्या दृष्टिकोनातून खूपच महत्त्वाचा असतो.

माध्यमिक शालांत प्रमाणपत्र मंडळ (एस. एस. सी. बोर्ड) परीक्षेत जर अपेक्षेप्रमाणे चांगले गुण मिळाले नाहीत तर विद्यार्थ्यांची नैराश्याकडे वाटचाल होणे, उच्च शिक्षणामध्ये प्रवेशित संधीचे प्रमाण कमी होणे यांसारख्या अनेक समस्यांना सामोरे जावे लागते. अशा परिस्थितीत विद्यार्थ्यांशी प्रत्यक्ष संवाद साधून मनोबल वाढविणे, पुरवणी परीक्षेच्या तयारीसाठी आवश्यक ते मार्गदर्शन करणे आणि पुढील शिक्षण घेण्यासाठी त्यांना प्रेरणा देणे महत्त्वपूर्ण ठरते.

दरवर्षी नियोजित वेळापत्रकानुसार होणाऱ्या माध्यमिक शालांत प्रमाणपत्र मंडळ (एस. एस. सी. बोर्ड) मार्फत घेतल्या जाणाऱ्या मुख्य लेखी परीक्षेत तसेच ज्या विद्यार्थ्यांना गणित या विषयात उत्तीर्ण होण्यासाठी किमान गुण मिळवू शकले नाहीत तसेच अपेक्षित यश प्राप्त करता आले नाही त्या विद्यार्थ्यांसाठी पुरवणी परीक्षेमध्ये यशस्वी होण्याच्या उद्देशाने राज्य स्तरावरून पूरक अध्ययन साहित्य तयार करण्यात आले आहे.

सदर पूरक अध्ययन साहित्य निर्मितीमध्ये गणित या विषयाचे अध्यापन करणारे शिक्षक आणि मूल्यमापन प्रक्रियेतील तज्ज्ञ शिक्षक यांचा समावेश असून अभ्यासपूर्ण आणि सोप्या, सुलभ पद्धतीने तयार करण्यात आले आहे. यापूर्वी झालेल्या बोर्डाच्या प्रश्न पत्रिकांचे विश्लेषण करून घटकनिहाय भारांशानुसार विविध प्रश्न प्रकार सरावासाठी देण्यात आले आहेत. या पुस्तिकेत प्रत्येक घटकातील महत्त्वाच्या संकल्पनांवर भर देण्यात आला आहे. नियोजित पुरवणी परीक्षेत यश संपादन करण्यासाठी सदर अध्ययन साहित्याची नक्कीच मदत होईल.

मुख्य उद्दिष्टे :

- १) माध्यमिक शालांत प्रमाणपत्र मंडळ (एस. एस. सी. बोर्ड) च्या परीक्षेला आत्मविश्वासाने सामोरे जाण्यासाठी विद्यार्थ्यांना आवश्यक/पूरक अध्ययन साहित्य उपलब्ध करून देणे.

- २) पुरवणी परीक्षेला सामोरे जाणाऱ्या विद्यार्थ्यांना माध्यमिक शालांत प्रमाणपत्र मंडळ (एस. एस. सी. बोर्ड) पुरवणी परीक्षेत १००% यश मिळविण्यासाठी पूरक अध्ययन साहित्याद्वारे मार्गदर्शन करणे.
- ३) पुरवणी परीक्षेत विद्यार्थ्यांना गणित विषयात अधिकाधिक गुण मिळवण्यासाठी प्रोत्साहित करणे.
- ४) महत्त्वपूर्ण गणित संकल्पनांचे आकलन होण्यास मदत करणे.

विद्यार्थ्यांसाठी सूचना :

- १) सदर पूरक अध्ययन साहित्याचा वापर पुरवणी परीक्षेची तयारी करण्यासाठी करावा.
 - २) सदर साहित्यामध्ये देण्यात आलेल्या महत्त्वपूर्ण संकल्पनांचा सराव करावा.
 - ३) नमुना सराव प्रश्नपत्रिका उत्तरासहीत देण्यात आली असून त्याचा सराव करावा.
 - ४) सरावासाठी देण्यात आलेल्या प्रश्न/उदाहरणांचा सराव करावा.
 - ५) सदर साहित्य वापरताना काही शंका किंवा समस्या आल्यास शिक्षकांचे आवश्यक ते मार्गदर्शन घेण्यात यावे.
 - ६) सदर साहित्य कसे वापरावे याबाबत घेण्यात येणाऱ्या उद्बोधन सत्राचे नियोजन शाळेमार्फत जाणून घेऊन ऑनलाईन पद्धतीने घेण्यात येणाऱ्या उद्बोधन सत्रास उपस्थित राहून माहिती घ्यावी. ज्यांना उद्बोधन सत्रास उपस्थित राहणे शक्य झाले नसेल त्यांनी शाळेतील शिक्षकांची मदत घेण्यात यावी.
- (टीप : सदर साहित्य हे विद्यार्थ्यांना सरावासाठी तयार करण्यात आले असून यामधील प्रश्न पुरवणी परीक्षेमध्ये विचारले जातीलच असे नाही याची सर्वांनी नोंद घ्यावी.)

अनुक्रमणिका

अ.क्र.	घटक	पृष्ठ क्र.
भाग - 1		
1.	दोन चलांतील रेषीय समीकरणे	1
2.	वर्गसमीकरणे	10
3.	अंकगणिती श्रेढी	17
4.	अर्थनियोजन	25
5.	संभाव्यता	29
6.	सांख्यिकी	35
भाग - 2		
1.	समरूपता	55
2.	पायथागोरसचे प्रमेय	66
3.	वर्तुळ	77
4.	भौमितिक रचना	84
5.	निर्देशक भूमिती	94
6.	त्रिकोणमिती	100
7.	महत्त्वमापन	115

1. दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

पूर्वज्ञान :

• दोन चलांतील रेषीय समीकरणे :

- 1) ज्या समीकरणामध्ये दोन चले वापरली जातात आणि चल असलेल्या प्रत्येक पदाची कोटी 1 असते त्या समीकरणाला दोन चलांतील रेषीय समीकरण असे म्हणतात.
- 2) दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचे सामान्य स्वरूप : $ax + by + c = 0$ येथे a, b, c या वास्तव संख्या असून a आणि b हे एकाच वेळी शून्य नसतात.

• सराव आणि स्वाध्याय :

- 1) खालीलपैकी कोणते समीकरण दोन चलातील रेषीय समीकरण नाही.

(A) $x + y = 4$ (B) $x - y = 4$ (C) $x^2 + y = 4$ (D) $x = 4y$

उकल : (C) $x^2 + y = 4$ (पहिल्या पदाची कोटी 2 आहे)

- 2) $3x = 4y - 12$ हे समीकरण सामान्य स्वरूपात लिहा.

उकल : $3x - 4y + 12 = 0$ ($ax + by + c = 0$ हे सामान्य स्वरूप वापरून)

- 3) $x + y = 7$ या समीकरणाच्या कोणत्याही दोन उकली लिहा.

उकल : $(0, 7), (7, 0)$ (मुक्त प्रश्न)

• एकसामयिक रेषीय समीकरणे :

- 1) जेव्हा आपण दोन चलातील दोन रेषीय समीकरणांचा एकाच वेळी विचार करतो तेव्हा त्या समीकरणांना एक सामयिक समीकरणे म्हणतात.
- 2) एकसामयिक समीकरणे खालीलपैकी कोणत्याही एका पद्धतीने सोडवता येतात :
 - (1) एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात लिहून
 - (2) एका चलाचा लोप करून
 - (3) आलेख पद्धती
 - (4) निश्चयक पद्धती (क्रेमर्स पद्धती)

• सराव आणि स्वाध्याय :

1) $2x + y = 9$ या समीकरणांमध्ये जर $x = 3$ तर y ची किंमत किती = ?

(A) 6 (B) 5 (C) 3 (D) -3

उकल : (C) 3

2) जर $4x + 3y = 11$ आणि $3x + 4y = 10$ तर $x - y$ ची किंमत काढा ?

$$4x + 3y = 11$$

उकल :
$$\begin{array}{r} - 3x + 4y = 10 \text{ (समीकरणांची वजाबाकी करून)} \\ \hline x - y = 1 \end{array}$$

3) $2x - y = 4$ या समीकरणामध्ये जर $y = 2$ तर x ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा ?

$y = \boxed{}$ ही किंमत $2x - y = 4$ या समीकरणांमध्ये ठेवून.

$$\therefore 2x - \boxed{} = 4$$

$$\therefore 2x = 4 + \boxed{}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$

4) एकसामयिक समीकरणे सोडवा :

$$x + y = 6 \text{ आणि } x - y = 4$$

उकल :

$$x + y = 6 \quad \dots\dots(I)$$

$$+ \quad x - y = 4 \quad \dots\dots(II)$$

$$\hline 2x \quad y = 10 \text{ समीकरण (I) आणि (II) ची बेरीज करून}$$

$$\therefore x = 5$$

$x = 5$ ही किंमत $x + y = 6$ या समीकरणात ठेवून.

$$\therefore 5 + y = 6$$

$$\therefore y = 1$$

$\therefore x = 5, y = 1$ ही समीकरणाची उकल आहे.

5) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$$2x - 3y = 9, 2x + y = 13$$

उकल : $2x - 3y = 9$(I) $2x + y = 13$ (II)

समीकरण (II) ला 3 ने गुणून

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = 39 \text{(III)} \\ + \\ 2x - 3y = 9 \text{(I)} \\ \hline \end{array}$$

$8x = 48$ समीकरण (I) आणि (II) ची बेरीज करून

$\therefore x = 6$

$x = 6$ ही किंमत $2x + y = 13$ या समीकरणात ठेवून.

$$\therefore 2 \times 6 + y = 13$$

$$\therefore y = 13 - 12$$

$\therefore x = 6, y = 1$ ही समीकरणाची उकल आहे.

6) सोडवा. $x + y = 5, x - y = 13$

• एक सामायिक समीकरणे सोडवण्याची आलेख पद्धती :

- 1) एकाच निर्देशक पद्धतीत बिंदू स्थापन करून समीकरणांचे आलेख काढा.
- 2) रेषांच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक शोधा आणि त्यावरून एक सामायिक समीकरणाची उकल लिहा.

• सराव आणि स्वाध्याय :

- 1) $4x + 5y = 19$ या समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी, $x = 1$ असताना y ची किंमत किती.

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

उकल : (B) 3

- 2) $x + y = 3$ या समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

x	3	<input type="text"/>	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	5	3
(x, y)	(3, 0)	<input type="text"/>	(0, 3)

उकल :

x	3	<input type="text" value="-2"/>	<input type="text" value="0"/>
y	<input type="text" value="0"/>	5	3
(x, y)	(3, 0)	<input type="text" value="-2, 5"/>	(0, 3)

- 3) $x - y = 4$ या समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

x	<input type="text"/>	-1	0
y	0	<input type="text"/>	-4
(x, y)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	(0, -4)

• निश्चयक :

1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ हा चार घटकांचा निश्चयक असून त्याची कोटी दोन आहे.

2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ हा निश्चयक एका संख्येसाठी लिहिला जातो.

= $(a \times d) - (b \times c)$ (ही निश्चयकाची किंमत आहे.)

3) **क्रेमरची पद्धती :** क्रेमरची पद्धती वापरून एक सामायिक समीकरणे सोडवण्यासाठी दिलेली समीकरणे $ax + by = c$ या स्वरूपात लिहा.

D, D_x आणि D_y या निश्चयकांच्या किमती काढा.

$x = \frac{D_x}{D}$ आणि $y = \frac{D_y}{D}$ यानुसार x व y च्या किमती काढून उकल लिहा.

• सराव आणि स्वाध्याय :

1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ या निश्चयकाची किंमत किती?

(A) -1

(B) -41

(C) 41

(D) 1

उकल : (D) 1 कारण $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = (5 \times -4) - (-7 \times 3)$
 $= -20 + 21$
 $= 1$

2) x आणि y ही चले असलेल्या समीकरणात, जर $D_x = 49, D_y = -63, D = 7$ तर x ची किंमत किती?

उकल : सूत्राचा वापर करून, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{49}{7} = 7$

3) रिकाम्या चौकटीत योग्य संख्या लिहा.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times \square) - (\square \times 3)$$

$$= \square - 21$$

$$= \square$$

उकल : $= (5 \times \square 9) - (\square 7 \times 3)$

$$= \square 45 - 21$$

$$= \square 24$$

- 4) एकसामायिक समीकरण $ax + by + c = 0$ आणि $mx + ny = d$ मध्ये $an \neq bm$ तर दिलेल्या समीकरणांना
- (A) एकच उकल असेल. (B) उकल नसेल.
(C) असंख्य उकली असतील. (D) फक्त दोन उकली असतील.

5) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ या निश्चयकाची किंमत काढा.

- 6) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ ही समीकरणे क्रेमरची पद्धती वापरून सोडवण्यासाठी D आणि D_y च्या किमती काढा.

- 7) खालील एक सामायिक समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने सोडवा.

$$3x - 4y = 10 ; 4x + 3y = 5$$

उकल : $3x - 4y = 10 ; 4x + 3y = 5$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (3 \times 3) - (-4 \times 4) \\ = 9 - 16 \\ = 15$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (10 \times 3) - (-4 \times 5) \\ = 30 + 20 \\ = 50$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3 \times 5) - (10 \times 4) \\ = 15 - 40 \\ = -25$$

$$\text{क्रेमरच्या पद्धतीनुसार, } x = \frac{D_x}{D} = \frac{50}{25} = 2 \text{ and } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-25}{25} = -2$$

$\therefore (x, y) = (2, -1)$ ही समीकरणाची उकल आहे.

8) खालील एक सामायिक समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने सोडवा.

$$6x - 3y = -10 ; 3x + 5y - 8 = 0$$

• दोन चलातील रेषीय समीकरणात रूपांतर करण्याजोगी समीकरणे :

दिलेल्या चलांमध्ये योग्य तो बदल करून आपण नवीन चलांची निर्मिती करू शकतो ही नवीन चले वापरून दिलेले समीकरणे रेषीय समीकरणाच्या स्वरूपात लिहिता येते.

• सराव आणि स्वाध्याय :

1) पुढीलपैकी कोणते समीकरणे दोन चलातील रेषीय समीकरणे आहेत

(A) $2x^2 - y = 0$

(B) $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$

(C) $7xy - 2 = 0$

(D) $3x^2 + 4y = 0$

उकल : पर्याय (D)

2) खालील समीकरणे सोडवा.

$$\text{उकल : } \frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6} ; \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6} \text{ हे समीकरण } 2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{6} \text{ असे लिहिता येईल.}$$

$$\text{आणि } \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0 \text{ हे समीकरण } 3\left(\frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\frac{1}{x} \text{ ऐवजी 'm' आणि } \frac{1}{y} \text{ ऐवजी 'n' घेऊन}$$

$2m + \frac{2}{3}n = \frac{1}{6}$ हे समीकरण 6 ने गुणून

$$12m + 4n = 1 \dots\dots (I)$$

आणि $3m + 2n = 0 \dots\dots (II)$

समी. (II) ला 2 ने गुणून

$$6m + 4n = 0 \dots\dots (III)$$

तसेच $-12 + 4n = 1 \dots\dots (I)$

$$-6m = -1 \text{ (वजाबाकी करून)}$$

$$\therefore m = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

$m = \frac{1}{6}$ ही किंमत $3m + 2n = 0 \dots\dots (II)$ मध्ये वापरून

$$3 = \left(\frac{1}{6}\right) + 2n = 0$$

$$\therefore 2n = -\frac{1}{4} = \frac{1}{y}$$

$$n = -\frac{1}{4}$$

परंतू $m = -\frac{1}{x}$ आणि $n = \frac{1}{y} \therefore \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$ आणि $-\frac{1}{4} = \frac{1}{y}$

$\therefore x = 6$ आणि $y = -4$ किंवा $(6, -4)$

3) सोडवा. $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-1} = 2$; $\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-1} = 1$

- एकसामायिक समीकरणांचे उपयोजन : दिलेल्या अटीनुसार आपण समीकरणे तयार करून दोन चलातील रेषीय समीकरणे सोडवू शकतो.

सराव आणि स्वाध्याय :

1) एका वहीची किंमत ही पेनाच्या किमतीपेक्षा दुप्पट आहे ही माहिती दोन चलातील रेषीय समीकरणात पुढील प्रकारे कोणत्या स्वरूपात लिहिता.

(A) $x + y = 2$ (B) $x + 2 = y$ (C) $x - y = 2$ (D) $y = 2x$

उकल : (D) $y = 2x$

2) दोन चलांचा वापर करून एकसामायिक समीकरण तयार करा. दोन संख्यांची बेरीज 21 आहे.

उकल : समजा दोन संख्या x आणि y आहेत, दिलेल्या अटीनुसार $x + y = 21$ हे समीकरण लिहिता येईल.

3) एका आयताची परिमिती 40 सेमी आहे. आयताची लांबी रुंदीच्या दुपटीपेक्षा दोन ने जास्त आहे, तर समीकरणे तयार करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

समजा आयताची लांबी x सेमी आणि रुंदी y सेमी आहे.

पहिल्या अटीनुसार $2(x + y) = \square$ $x + y = \square$ (I)

दुसऱ्या अटीनुसार $x = 2y + \square$ $x - \square = 2$ (II)



2. वर्गसमीकरणे

पूर्वज्ञान :

- 1) वर्गसमीकरणाचे सामान्यरूप : $ax^2 + bx + c = 0$ (येथे x हा चल असून a, b, c या वास्तव संख्या आहेत. तसेच $a \neq 0$)
- 2) वर्गसमीकरणाची मुळे (उकली) : चलाच्या ज्या किमतीमुळे दिलेल्या समीकरणाची डावी बाजू व उजवी बाजू समान मिळते, त्या किमतीला त्या वर्गीकरणाची 'उकल' किंवा 'मूळ' असे म्हणतात.
- 3) वर्गसमीकरण सोडविण्याच्या पद्धती :
 - 1) अवयव पद्धत 2) पूर्ण वर्ग पद्धत 3) सूत्र पद्धत
- 4) वर्गसमीकरण सोडविण्याचे सूत्र : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 5) विवेचक : $\Delta = b^2 - 4ac$
- 6) मुळांचे स्वरूप ठरविणे :
 - 1) जर $\Delta = 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असतात.
 - 2) जर $\Delta > 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व असमान असतात.
 - 3) जर $\Delta < 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव नसतात.
- 6) वर्गसमीकरणाची मुळे व सहगुणक यामधील संबंध : जर α व β ही $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे असतील, तर
 - 1) $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$
 - 2) $\alpha\beta = \frac{c}{a}$
- 7) वर्गसमीकरणाची मुळे दिली असता, वर्गसमीकरण तयार करण्याचे सूत्र : $x^2 - [\alpha + \beta]x + \alpha\beta = 0$

उदाहरणे :

प्र. 1 अ) योग्य पर्याय निवडा.

- 1) $x^2 + mx - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ 2 असेल, तर m ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?
(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

$$x = 2 \text{ घेऊ.}$$

$$\therefore x^2 + mx - 5 = 0$$

$$\therefore (2)^2 + m \times 2 - 5 = 0$$

$$\therefore 4 + 2m - 5 = 0$$

$$\therefore 2m - 1 = 0$$

$$\therefore 2m = 1$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{उत्तर : पर्याय क्र. (C)}$$

2) $x^2 + kx + k = 0$ ची मुळे वास्तव व समान असतील, तर k ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) 0

(B) 4

(C) 0 किंवा 4

(D) 2

$$a = 1, b = k, c = k$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (k)^2 - 4 \times 1 \times k = k^2 - 4k$$

परंतु मुळे वास्तव व समान आहेत

$$\therefore \Delta = 0$$

$$\therefore k^2 - 4k = 0$$

$$\therefore k(k - 4) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ किंवा } k - 4 = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ किंवा } k = 4 \quad \therefore \text{उत्तर : पर्याय क्र. (C)}$$

3) पुढीलपैकी कोणते वर्गसमीकरण आहे ?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$

(B) $x(x + 5) = 4$

(C) $n - 1 = 2n$

(D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

4) खालीलपैकी कोणत्या समीकरणांच्या मुळांची बेरीज 1 आहे ?

(A) $x^2 + x + 1 = 0$

(B) $3x^2 + x + 3 = 0$

(C) $3x^2 + 3x + 1 = 0$

(D) $3x^2 - 3x + 1 = 0$

प्र. 1 ब) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

1) $x + \frac{1}{x} = -2$ हे वर्गसमीकरण आहे का ते ठरवा.

$$x + \frac{1}{x} = -2$$

प्रत्येक पदास x ने गुणू

$$\therefore x \times x + x \times \frac{1}{x} = -2 \times x$$

$$\therefore x^2 + 1 = -2x$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$$

येथे कोटी 2 असल्याने हे वर्गसमीकरण आहे.

2) $x^2 + 4x - 5 = 0$ या समीकरणाचे $x = -1$ हे मूळ आहे की नाही ते ठरवा.

$x = -1$ घेऊ

डावी बाजू =	$x^2 + 4x - 5$	उजवी बाजू =	0
	$= (-1)^2 + 4 \times (-1) - 5$		
	$= 1 - 4 - 5$		
	$= -8$		

डावी बाजू \neq उजवी बाजू

$x = -1$ हे मूळ नाही

3) $(l + 2)(l - 5) = 0$ हे समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपात लिहा.

4) पुढील वर्ग समीकरणासाठी a, b, c च्या किंमती लिहा.

$$y^2 = 2y - 7$$

5) पुढील माहितीवरून वर्गसमीकरण तयार कर.

एका बागेत एकूण 150 झाडे आहेत. त्या बागेतील आडव्या रांगेतील झाडांची संख्या ही उभ्या ओळीतील झाडांच्या संख्येपेक्षा 5 ने अधिक आहेत.

प्र. 2) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

1) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ या समीकरणाच्या विवेचकाची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती :

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून

$$a = 3, b = 2, c = \boxed{}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (2)^2 - 4 \times 3 \times \boxed{}$$

$$= 4 + \boxed{}$$

$$\therefore \Delta = \boxed{}$$

2) $x^2 + 8x - 48 = 0$ हे वर्गसमीकरण अवयव पद्धतीने सोडविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती :

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$x^2 + \boxed{}x - 4x - 48 = 0$$

$$\therefore x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$$

$$\therefore (x + 12) \left(\right) = 0$$

$$\therefore \boxed{} = 0 \text{ किंवा } x - 4 = 0$$

$$\therefore \boxed{} = 0 \text{ किंवा } x = 4$$

3) विवेचकाच्या साहाय्याने खालील वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप ठरवा.

$$3x^2 + 5x - 4 = 0$$

4) α व β ही $2x^2 + 6x - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत, तर $\alpha + \beta$ आणि $\alpha\beta$ च्या किमती काढा.

5) ज्या वर्गसमीकरणाची मुळे -7 व 5 आहेत, असे वर्गसमीकरण तयार करा.

6) खालील समीकरणे अवयव पद्धतीने सोडवा.

1) $3x^2 - x - 10 = 0$

2) $9m^2 - 16 = 0$

3) $3y^2 = 15y$

प्र. 3) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

1) जर $kx^2 - 14x - 5 = 0$ या समीकरणाचे $x = 5$ हे एक मूळ असेल, तर k ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$x = 5$ घेऊ.

$\therefore kx^2 - 14x - 5 = 0$

$\therefore k \boxed{}^2 - 14 \times \boxed{} - 5 = 0$

$\therefore \boxed{}k - 70 - 5 = 0$

$\therefore 25k = \boxed{}$

$\therefore k = \frac{75}{\boxed{}}$

$\therefore k = \boxed{}$

2) सूत्राचा वापर करून सोडवा. $5m^2 - 4m - 2 = 0$

3) पूर्ण वर्ग पद्धतीने सोडवा. $3y^2 + 7y + 1 = 0$

4) दोन क्रमागत सम नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गांची बेरीज 244 आहे, तर त्या संख्या शोधा.

5) एका आयताची लांबी, रुंदीपेक्षा 2 सेमीने अधिक आहे. जर आयताचे क्षेत्रफळ 24 चौसेमी असेल, तर त्या आयताची लांबी व रुंदी काढा.



3. अंकगणित श्रेढी

पूर्वज्ञान :

संख्याज्ञान : 1) सम संख्या 2, 4, 6, 8, 10, 12, अनुक्रमे येणाऱ्या सम संख्यांमध्ये फरक 2 असतो.
2) विषम संख्या 1, 3, 5, 7, 9 अनुक्रमे येणाऱ्या विषम संख्यांमध्ये फरक 2 असतो.

विभाज्य संख्या : 1) 3 ने विभाज्य संख्या 3, 6, 9, 12, 15, 18,
2) 5 ने विभाज्य संख्या 5, 10, 15, 20, 25,
3) 8 ने विभाज्य संख्या 8, 16, 24, 32, 40,

चिन्हांकित संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी :

समान चिन्हे : बेरीज करून उत्तराला दिलेल्या संख्येचे चिन्ह द्यावे.

भिन्न चिन्हे : मोठी संख्या-लहान संख्या आणि उत्तराला मोठ्या संख्येचे चिन्ह द्यावे.

उदा. 1) $17 + 9 = 26$ 2) $17 - 9 = 8$
3) $-17 - 9 = -26$ 4) $-17 + 9 = -8$

ऋण चिन्हांनंतर कंस असेल, तर कंसाचा लोप होताना कंसातील प्रत्येक पदाचे चिन्ह बदलावे.

उदा. $18 - (-7) = 18 + 7 = 25$

समीकरणे सोडवणे : 1) $\frac{x}{6} = 4$ 2) $7x = 28$
 $\therefore x = 6 \times 4$ $\therefore x = \frac{28}{7}$
 $\therefore x = 24$ $\therefore x = 4$

प्र. 1 अ) पुढील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यापैकी अचूक पर्याय निवडून त्याचे वर्णाक्षर लिहा.

1) एका अंकगणिती श्रेढीचे n वे पद $2n - 5$ आहे, तर t_5 किती?

(A) 15 (B) 5 (C) 10 (D) -5

उकल : n वे पद $= t_n = 2n - 5$

$n = 5$ ठेवून

$t_n = 2 \times 5 - 5$

$\therefore = 10 - 5$

$\therefore t_n = 5$ \therefore उत्तर : पर्याय (B)

2) पहिल्या 10 नैसर्गिक संख्यांची बेरीज किती ?

(A) 55 (B) 45 (C) 20 (D) 60

उकल : येथे $n = 10, t_1 = 1$

$$S_n = \frac{n}{2} (t_1 + t_n)$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10}{2} (1 + 10)$$

$$\therefore S_{10} = 5 \times 11 = 55$$

\therefore उत्तर : पर्याय (A)

3) जर एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 3 व सामान्य फरक 4 असेल, तर अंकगणिती श्रेढीची पहिली तीन पदे कोणती ?

(A) 3, 7, 11, ... (B) 3, -7, 11 ...

(C) 3, -1, -3, ... (D) 3, -7, -11 ...

4) 6, 10, 14, 18, या अंकगणिती श्रेढीसाठी a ची किंमत काढा.

(A) 4 (B) 10 (C) 6 (D) 18

ब) खालील उपप्रश्न सोडवा.

1) 2, 4, 6, 8, या अंकगणिती श्रेढीमधील सामाईक फरक किती ?

उकल : $t_1 = 2, t_2 = 4$

$$\therefore d = t_2 - t_1$$

$$\therefore = 4 - 2$$

$$\therefore d = 2$$

सामान्य फरक = 2

2) एका अंकगणिती श्रेढीचे n वे पद $3n + 1$ आहे, तर 7 वे पद काढा.

3) 3, 5, 7, 9, 11, ... या अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद व सामान्य फरक काढा.

4) 1, 3, 6, 10, ... ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे का ते ठरवा.

5) जर एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 9 व सामान्य फरक 5 असेल, तर अंकगणिती श्रेढीची पहिली तीन पदे शोधा.

प्र. 2 अ) खालील कृती लिहून पूर्ण करा.

1) पहिल्या 20 सम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करा.

कृती : समजा, 2, 4, 6, 8, 10, या सम नैसर्गिक संख्या आहेत.

$$\therefore a = 2, d = 4 - 2 = 2, n = 20$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

$$\therefore S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times 2 + (20 - 1) \times 2]$$

$$\therefore = 10 (4 + 38) \therefore S_{20} = 420$$

\therefore पहिल्या 20 सम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज 420 एवढी आहे.

2) 68 ही संख्या 5, 8, 11, 14, या अंकगणिती श्रेढीचे कितवे पद आहे?

कृती : येथे $a = 5$, $d = \square$, $t_n = 68$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$\therefore 68 = 5 + (n-1)\square$$

$$\therefore 68 = 5 + 3n - \square$$

$$\therefore n = \square$$

3) एका अंकगणिती श्रेढीसाठी $t_1 = 1$ व $t_n = 149$ असेल, तर S_n काढा.

कृती : येथे $t_1 = 1$, $t_n = 149$, $s_n = ?$

$$s_n = \frac{n}{2} (t_1 + t_n)$$

$$\therefore s_n = \frac{n}{2} (\square + \square)$$

$$\therefore = \frac{n}{2} \times \square$$

$$s_n = \square n$$

ब) खालील उपप्रश्न सोडवा.

1) 3, 9, 15, 21 या अंकगणिती श्रेढीचे 11 वे पद शोधा.

उकल : दिलेली अंकगणिती श्रेढी 3, 9, 15, 21,

येथे $a = 3$, $d = 9 - 3 = 6$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$\therefore t_{11} = 3 + (11-1) \times 6$$

$$\therefore = 3 + 10 \times 6$$

$$\therefore t_{11} = 63$$

2) 6 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्या किती असतील ?

उकल : 6 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्यांची यादी 12, 16, 20, 24, 96 ही आहे.

$$t_n = 96, a = 12, d = 6, n = ?$$

$$t_n = a + (n - 1) d$$

$$\therefore 96 = 12 + (n - 1) 6$$

$$\therefore = 12 + 6n - 6$$

$$\therefore 6n = 90$$

$$\therefore n = 15$$

\therefore 6 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्या 15 आहेत.

3) एका अंकगणिती श्रेढीमध्ये $a = 7$ व $d = 3$ आहे, तर S_{10} काढा.

4) एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 3 व सामान्य फरक 5 असेल, तर t_{30} काढा.

5) 1, 7, 13, 19, या अंकगणिती श्रेढीचे 18 वे पद शोधा.

6) 7 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी नैसर्गिक संख्या किती आहेत ते काढा.

प्र. 3 अ) खालील कृती लिहून पूर्ण करा.

1) कल्पना दर महिन्याला ठरावीक रकमेची बचत करते. तिने पहिल्या महिन्यात रु.100, दुसऱ्या महिन्यात रु.150, तिसऱ्या महिन्यात रु. 200 याप्रमाणे बचत केली, तर किती महिन्यात 1200 रु. बचत होईल?

कृती : कल्पनाची मासिक बचत : 100 रु., 150 रु., 200 रु..... 1200 रु. अशी आहे.

येथे $d = 50$ रु. आहे म्हणून दिलेली क्रमिका ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

$$a = 10, \quad d = 50, \quad t_n = \boxed{1200}$$

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore \boxed{1200} = 100 + (n - 1) \times 50$$

$$\therefore \boxed{1200} = 50n - \boxed{50}$$

$$\therefore \frac{1200}{50} = n$$

$$\therefore n = \boxed{24}$$

म्हणून 1200 रु. बचत $\boxed{24}$ महिन्यात होईल.

2) 1 ते 140 या दरम्यानच्या 4 ने भाग जाणाऱ्या नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करा.

कृती : 1 ते 140 या 4 ने भाग जाणाऱ्या नैसर्गिक संख्या 4, 8, 12, 140 या आहेत.

येथे $d = 4$ आहे म्हणून दिलेली क्रमिका ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

$$a = 4, d = 4, t_n = 140, S_n = ?$$

$$t_n = a + (n - 1) d$$

$$\therefore \boxed{} = 4 + (n - 1) \times 4$$

$$\therefore \boxed{} = (n - 1) \times 4$$

$$\therefore n = \boxed{}$$

$$\text{आता } S_n = \frac{n}{2} [a + t_n]$$

$$\therefore S_n = 17 \times \boxed{}$$

$$\therefore S_n = \boxed{}$$

म्हणून 1 ते 140 या दरम्यानच्या 4 ने भाग जाणाऱ्या नैसर्गिक संख्यांची बेरीज $\boxed{}$ आहे.

ब) खालील उपप्रश्न सोडवा.

1) एका गावात 2010 साली 5000 लोक साक्षर होते. ही संख्या दरवर्षी 300 ने वाढते, तर 2020 साली किती लोक साक्षर असतील ?

उकल : दिलेल्या माहितीवरून $t_1 = 5000, t_2 = 5300, t_3 = 5600$

$$\therefore a = 5000, d = 300, n = 11$$

$$t_n = a + (n - 1) d$$

$$\therefore = 5000 + (11 - 1) 300$$

$$\therefore = 5000 + 3000$$

$$\therefore t_n = 8000$$

\therefore 2020 साली 8000 लोक साक्षर असतील.

2) 5, 9, 13, 17, ... अंकगणिती श्रेढीचे कितवे पद 41 आहे?

3) विजयने राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्रांमध्ये पहिल्या वर्षी 500 रुपये, दुसऱ्या वर्षी 700 रुपये, तिसऱ्या वर्षी 900 रुपये याप्रमाणे रक्कम गुंतवली, तर त्याची 12 वर्षांतील एकूण गुंतवणूक किती?

4) 1 ते 700 या दरम्यानच्या 7 ने भाग जाणाऱ्या नैसर्गिक संख्यांची बेरीज किती?

5) एका सभागृहात खुर्च्यांच्या एकूण 30 रांगा आहेत. पहिल्या रांगेत 20 खुर्च्या आहेत, दुसऱ्या रांगेत 24 खुर्च्या, तिसऱ्या रांगेत 28 खुर्च्या याप्रमाणे सर्व खुर्च्यांची मांडणी आहे, तर सभागृहात एकूण किती खुर्च्या असतील?



4. अर्थनियोजन

- 1) 'जीएसटी' म्हणजे वस्तू व सेवा कर.
- 2) GST म्हणजे Goods and Service Tax.
- 3) 1 जुलै, 2017 पासून ही करप्रणाली अमलात आली.
- 4) GST चे दोन भाग -
 - i) CGST - Central Goods and Service Tax केंद्रीय वस्तू व सेवा कर
 - ii) SGST - State Goods and Service Tax राज्य वस्तू व सेवा करप्रत्येक वस्तूवर केंद्र व राज्याचा कर दर समान आहे.

$$\boxed{\text{CGST} = \text{SGST}}$$

- 5) जीएसटी आय.एन. - CGST IN मध्ये 15 अंक व लेटर असतात. हा व्यापाऱ्याचा ओळख क्रमांक आहे.
- 6) कराचा दर
 - 1) वस्तूप्रमाणे करांचे दर वेगवेगळे आहेत.
जसे 0%, 5%, 12%, 18% व 28%
 - 2) जीवनावश्यक वस्तूंवरील वस्तू व सेवा कराचा दर 0% आहे.
 - 3) शेअर्सच्या दलाली सेवेवरील कराचा दर 18% आहे.

प्र.1 अ) खालील प्रश्नांसाठी उत्तराचा अचूक पर्याय निवडा.

- 1) आपल्या देशात या तारखेपासून वस्तू व सेवा कर ही करप्रणाली अमलात आली.
A) 31 मार्च, 2017 B) 1 एप्रिल, 2017
C) 1 जाने., 2017 D) 1 जुलै, 2017
उकल : (D)
- 2) जीवनावश्यक वस्तूंवरील वस्तू व सेवा कराचा दर आहे.
A) 5% B) 12% C) 0% D) 18%
उकल : (C)
- 3) GST IN मध्ये एकूण अंकाक्षरे असतात.
- 4) दलालीवर वस्तू व सेवा कराचा दर आहे.

ब) खालील उपप्रश्न सोडवा.

- 1) 'पावन मेडिकल्स' औषधांचा पुरवठा करतात. त्यांच्या दुकानातील काही औषधांवर GST चा दर 12% आहे, तर CGST व SGST चा दर किती?

उकल : CGST व SGST चा दर समान असतो.

CGST चा दर 6%

SGST चा दर 6%

- 2) एका वस्तूवरील CGST चा दर 9% असेल, तर SGST चा दर किती?

उकल : CGST चा दर 9%

SGST चा दर 9%

- 3) एअर कंडिशनरवरील CGST चा दर 14% असेल, तर SGST चा दर किती?
GST चा दर किती?

- 4) वॉशिंग मशीनवरील GST चा दर 28% असेल, तर SGST व CGST चा दर काढा?

प्र. 2 अ) खालील कृती पूर्ण करून पुन्हा लिहा.

- 1) एका रिस्टवॉच बेल्टची करपात्र किंमत 586 रुपये आहे. GST चा दर 18% आहे, तर ग्राहकाला तो बेल्ट किती रुपयांस मिळेल?

GST चा दर = 18%

GST = करपात्र × GST चा दर

$$= 586 \times \boxed{18\%}$$

$$= 586 \times \frac{18}{100}$$

$$\text{GST} = \boxed{105.48}$$

पट्ट्याची किंमत = करपात्र किंमत + GST

$$= 586 + \boxed{105.48}$$

$$= \boxed{691.48} \text{ रुपये}$$

2) दर्शनी किंमत = 500 रुपये, अधिमूल्य = 65 रुपये, तर त्या शेअरचा बाजारभाव काढा ?

ब) खालील सारणी पूर्ण करा.

उदाहरण	दर्शनी किंमत	मूल्यप्रकार	बाजारभाव
1)	₹ 10	अधिमूल्य ₹ 7
2)	₹ 25	₹ 16
3)	सममूल्य	₹ 5
4)	₹ 20	अधिमूल्य ₹ 3

- 1) **म्युच्युअल फंड** – म्युच्युअल फंड म्हणजे तज्ज्ञ व्यावसायिक लोकांद्वारे निर्माण करण्यात आलेली फंड योजना.
- 2) **युनिटस्** – शेअरबाजारात पैसे गुंतवले की, शेअर्स मिळतात, तसे म्युच्युअल फंडात पैसे गुंतवले, की युनिटस् मिळतात.
- 3) **नक्त मूल्य (NAV)** – प्रतियुनिट जो बाजारभाव असेल, त्याला त्या युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य म्हणतात.

म्युच्युअल फंडमधील एकूण गुंतवणूक = एका युनिटचे नक्त मूल्य × युनिटची संख्या

क) 1) म्युच्युअल फंड योजनेचे बाजारमूल्य 200 कोटी रुपये असून कंपनीने 8 कोटी युनिट्स केली असतील, तर एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य काढा ?

$$\begin{aligned} \text{उकल : एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य} &= \frac{200 \text{ कोटी}}{8 \text{ कोटी}} \\ &= 25 \text{ कोटी रुपये} \end{aligned}$$

2) एका म्युच्युअल फंड योजनेतील गुंतवणूक ₹10000 आहे. तर ₹ 25 नक्त मालमत्ता मूल्य असणारे किती युनिट्स मिळतील ?

- **आऊटपूट टॅक्स** – वस्तू विकताना व्यापाऱ्याने गोळा केलेला कर.
- **इनपूट टॅक्स (ITC)** – त्याच व्यापाऱ्याने वस्तू खरेदीच्या वेळी दिलेला कर.

देय GST = आऊटपूट टॅक्स – इनपूट टॅक्स क्रेडिट (ITC)

उदा. 1) चेतना स्टोअर्सने खरेदीवर 1,00,500 रुपये जीएसटी दिला व विक्रीवर 1,22,500 रुपये जीएसटी गोळा केला, तर भरावा लागणारा देय जीएसटी काढा.

उकल : देय GST = आऊटपूट टॅक्स - इनपूट टॅक्स क्रेडिट

$$= 1,22,500 - 1,00,500$$

देय GST = 22,000 रुपये

2) नझमा यांनी खरेदीवर 12,500 रुपये जीएसटी दिला व विक्रीच्या वेळी 14,750 रुपये जीएसटी गोळा केला, तर देय जीएसटी काढा.

- शेअर - कंपनीच्या भागभांडवलातील एक भाग म्हणजे एक शेअर.
- दर्शनी किंमत (Face Value) - शेअर सर्टिफिकेटवर छापलेली एका शेअरची किंमत.
- बाजारभाव (Market Value - MV) - ज्या किमतीने शेअरबाजारात शेअर्सची खरेदी-विक्री होते, त्या किमतीला त्या शेअरचा बाजारभाव म्हणतात.
- जर बाजारभाव > दर्शनी किंमत, तर तो शेअर अधिमूल्यावर आहे.
- जर बाजारभाव = दर्शनी किंमत, तर तो शेअर सममूल्यावर आहे.
- जर बाजारभाव < दर्शनी किंमत, तर तो शेअर अवमूल्यावर आहे.
- एकूण गुंतवणूक = शेअर्सची संख्या × एका शेअरचा बाजारभाव.

प्र. 3) खालील उपप्रश्न सोडवा.

1) 100 रुपये दर्शनी किंमत असलेला एक शेअर 120 रुपये बाजारभावाने खरेदी केला, तर असे 50 शेअर्स घेण्यासाठी किती रुपये गुंतवणूक करावी लागेल ?

उकल : एकूण गुंतवणूक = शेअर्सची संख्या × एका शेअरचा बाजारभाव

$$= 50 \times 120$$

$$= 600 \text{ रुपये}$$



5. संभाव्यता

पूर्वज्ञान :

1) यादृच्छिक प्रयोग :

यादृच्छिक प्रयोगातील सर्व संभाव्य फलिते अगोदर माहित असतात, पण त्यांपैकी कोणत्याही फलितांबद्दल निश्चित भाकीत करू शकत नाही. सर्व फलिते सत्य असण्याची शक्यता समान असते.

2) निष्पत्ती :

यादृच्छिक प्रयोगाच्या फलिताला 'निष्पत्ती' म्हणतात.

3) नमुना अवकाश :

यादृच्छिक प्रयोगात शक्य असणाऱ्या सर्व निष्कर्षांच्या संचाला नमुना अवकाश म्हणतात.

नमुना अवकाश हा संच S किंवा Ω ने दर्शवतात. त्यातील एकूण घटकांची संख्या $n(S)$ ने लिहितात.

4) घटना :

अपेक्षित निष्पत्तींच्या संचाला 'घटना' असे म्हणतात. या घटना इंग्रजीतील पहिल्या लिपीतील A, B, C, D यांसारख्या अक्षरांनी दर्शवितात. समजा घटना A असेल, तर त्यामधील घटकांची संख्या $n(A)$ ने दर्शवतात.

5) घटनेची संभाव्यता :

एखाद्या यादृच्छिक प्रयोगासाठी नमुना अवकाश 'S' असेल आणि 'A' ही त्या प्रयोगासंबंधी अपेक्षित घटना असेल, तर त्या घटनेची संभाव्यता 'P(A)' अशी दर्शवतात आणि ती पुढील सूत्राने ठरवतात.

$$P(A) = \frac{\text{घटना A मधील नमुना घटकांची संख्या}}{\text{नमुना अवकाशातील एकूण घटकांची संख्या}}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

6) कोणत्याही घटनेची संभाव्यता ही 0 ते 1 किंवा 0% ते 100% असते. समजा घटना A असेल, तर $0 \leq P(A) \leq 1$ किंवा $0\% \leq P(A) \leq 100\%$

1) A) खालील प्रत्येकी प्रश्नासाठी अचूक पर्याय निवडा.

1) एक नाणे फेकले असता नमुना अवकाशातील घटकांची संख्या असते.

A) 3

B) 4

C) 2

D) 8

स्पष्टीकरण : एक नाणे फेकणे

$$S = \{H, T\}$$

$$\therefore n(S) = 2$$

\therefore उत्तर : पर्याय (C) 2

2) जर $n(A) = 2$, $p(A) = \frac{1}{5}$, तर $n(S) =$ किती?

A) 10 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

स्पष्टीकरण : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$$\therefore \frac{1}{5} = \frac{2}{n(S)}$$

$$\therefore 1 \times n(S) = 2 \times 5$$

$$\therefore n(S) = 10$$

\therefore उत्तर : पर्याय (A) 10

सरावासाठी :

1) खालीलपैकी कोणती संभाव्यता असू शकणार नाही?

A) $\frac{2}{3}$ B) 1.5 C) 15 % D) 0.7

2) एक फासा फेकला असता वरच्या पृष्ठभागावर 3 पेक्षा कमी संख्या येण्याची संभाव्यता असते.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 0

1) B) खालील उपप्रश्न सोडवा.

1) एक फासा टाकला असता नमुना अवकाश S आणि त्यातील नमुना घटकांची संख्या $n(S)$ लिहा.

उत्तर : एक फासा टाकणे.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore n(S) = 6$$

2) जर $n(A) = 12$ आणि $n(S) = 52$ असेल, तर $p(A)$ काढा.

$$\text{उत्तर : } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\therefore P(A) = \frac{12}{25}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{13}$$

सरावासाठी :

- 1) दोन नाणी फेकली असता नमुना अवकाश S आणि त्यातील नमुना घटकांची संख्या $n(s)$ लिहा.
- 2) एका पेटीत 15 तिकिटे आहेत. प्रत्येक तिकिटावर 1 ते 15 पैकी एक संख्या लिहिलेली आहे त्या पेटीतून एक तिकीट यादृच्छिक पद्धतीने काढले असता नमुना अवकाश S आणि त्यातील नमुना घटकांची संख्या $n(S)$ लिहा.

2) A) खालील कृती पूर्ण करा.

दोन नाणी एकाच वेळी फेकली असता घटना A साठी अट छापाने मिळणे अशी आहे, तर S , $n(S)$, A , $n(A)$ लिहिण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती: दोन नाणी फेकली असता

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$n(S) = 4$$

घटना A : छापाने मिळणे

$$A = \{TT\}$$

$$n(A) = 1$$

सरावासाठी :

- 1) एक नाणे फेकले असता घटना A साठी अट छापाने मिळण्याची आहे, तर छापाने मिळण्यासाठी संभाव्यता काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : एक नाणे फेकणे.

$$S = \{\}$$

$$\therefore n(S) = 2$$

घटना A साठी अट छाप मिळण्याची आहे.

$$A = \boxed{}$$

$$n(A) = 1$$

$$\text{आता, } P(A) = \frac{\boxed{}}{n(S)}$$

$$P(A) = \boxed{}$$

2) योग्य रीतीने पिसलेल्या 52 पत्त्यांच्या कॅटमधून एक पत्ता काढला, तर तो पत्ता लाल असण्याची संभाव्यता काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : समजा, नमुना अवकाश S आहे.

$$\therefore n(S) = \boxed{}$$

$$\text{एकूण लाल पत्ते, } n(A) = \boxed{}$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{\boxed{}}$$

$$p(A) = \boxed{}$$

2) B) खालील उपप्रश्न सोडवा.

1) एक फासा फेकला असता घटना A साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावर सम संख्या मिळणे अशी आहे, तर S, n(S), A, n(A) लिहा.

उत्तर : एक फासा फेकणे.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad n(S) = 6$$

घटना A वरच्या पृष्ठभागावर सम संख्या मिळणे.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore n(A) = 3$$

सरावासाठी :

1) एक नाणे व एक फासा एकाच वेळी फेकले असता घटना A साठी अट छाप आणि विषम संख्या मिळणे अशी, तर S, n(S), A, n(A) लिहा.

2) 3 मुलगे व 2 मुली यांतून दोन विद्यार्थ्यांची वृक्षसंवर्धन समिती बनवायची आहे, नमुना अवकाश व नमुना घटकांची संख्या n(S) लिहा.

3) A) खालील कृती पूर्ण करा.

1) एक फासा टाकला असता वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळण्याची संभाव्यता काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : एक फासा टाकणे.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$$

$$n(S) = 6$$

समजा घटना A : वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे.

$$A = \{2, 3, 5\}$$

$$n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

सरावासाठी :

1) एका खोक्यात 5 स्ट्रॉबेरीची, 6 कॉफीची व 2 पेपरमिंटची चॉकलेट्स आहेत. त्या खोक्यातून एक चॉकलेट काढले तर, i) काढलेले चॉकलेट कॉफीचे असणे आणि ii) काढलेले चॉकलेट पेपरमिंटचे असणे यांची संभाव्यता काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : समजा S नमूना अवकाश आहे.

$$\therefore n(S) = \square$$

घटना A : काढलेले चॉकलेट कॉफीचे असणे.

$$n(A) = \square$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{\square}$$

$$p(A) = \frac{6}{\square}$$

घटना B : काढलेले चॉकलेट पेपरमिंटचे असणे.

$$n(B) = \square$$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\therefore p(B) = \frac{\boxed{}}{13}$$

B) खालील उपप्रश्न सोडवा.

- 1) तीन नाणी एकाच वेळी फेकली असता, घटना A साठी अट, कमीत कमी दोन छापा मिळणे अशी आहे. घटना B साठी अट, दुसऱ्या नाण्यावर छापा मिळणे अशी आहे. तर, $S, n(S), A, n(A) B, n(B)$ लिहा.

उत्तर : तीन नाणी एकाच वेळी फेकणे.

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT\}$$

$$\therefore n(S) = 8$$

घटना A साठी अट, कमीत कमी दोन छापा मिळणे.

$$A = \{HHH, HHT, HTH, THH, \}$$

$$n(A) = 4$$

घटना B साठी अट, दुसऱ्या नाण्यावर छापा मिळणे.

$$B = \{HHH, HHT, THH, THT\}$$

$$n(B) = 4$$

सरावासाठी :

- 1) अंकांची पुनरावृत्ती न करता 2, 3, 5, 7, 9, या अंकांपासून दोन अंकी संख्या तयार केली, तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.
 - (i) ती संख्या विषम असेल
 - (ii) ती संख्या 5 च्या पटीत असेल
- 2) योग्य रीतीने पिसलेल्या 52 पत्त्यांच्या कॅटमधून एक पत्ता काढला तर, खालील घटनांची संभाव्यता काढा.
 - (i) एक्का मिळणे
 - (ii) इस्पिक पत्ता मिळणे.
- 3) फुगेवाला 2 लाल, 3 निळे आणि 4 हिरवे अशा रंगीत फुग्यांतील एक फुगा प्रणालीला यादृच्छिक पद्धतीने देणार आहे, तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.
 - (i) मिळालेला फुगा लाल असणे.
 - (ii) मिळालेला फुगा निळा असणे.

6. सांख्यिकी

- केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे :

A) मध्य B) मध्यक C) बहुलक

A) मध्य : सामग्रीतील सर्व संख्यांच्या अंकगणितीय सरासरीला त्या सामग्रीचा मध्य असे म्हणतात.

मध्य काढण्याच्या पद्धती :

- सरळ पद्धती : सरळ पद्धतीने मध्य काढण्यासाठी पुढीलप्रमाणे वारंवारता वितरण सारणी तयार करावी.

वर्ग	वर्गमध्य (x_i)	वारंवारता (f_i)	वर्गमध्य \times वारंवारता $x_i f_i$
------	-----------------------	------------------------	--

$$\text{सूत्र : मध्य} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$$

$\sum x_i f_i = x_i f_i$ ची बेरीज, $N =$ एकूण वारंवारता

- गृहीतमध्य पद्धती : गृहीत मध्य पद्धतीने मध्य काढण्यासाठी पुढीलप्रमाणे वारंवारता वितरण सारणी तयार करावी.

वर्ग	वर्गमध्य (x_i)	विचलन $d_i = x_i - Ax$	वारंवारता (f_i)	वारंवारता \times विचलन $f_i d_i$
------	-----------------------	---------------------------	------------------------	---------------------------------------

$$\text{सूत्र : मध्य} = \bar{X} = A + \bar{d} \text{ येथे } \bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{N}$$

$\sum f_i d_i = f_i d_i$ ची बेरीज, $N =$ एकूण वारंवारता, $A =$ गृहीतमध्य (कुठलाही वर्गमध्य हा A (गृहीतमध्य) घेता येतो. परंतु गणन करणे सोपे व्हावे म्हणून मधला वर्गमध्य हाच गृहीतमध्य घेतात.)

- मध्यप्रमाण विचलन पद्धती : या पद्धतीने मध्य काढण्यासाठी पुढीलप्रमाणे वारंवारता वितरण सारणी तयार करावी.

वर्ग	वर्गमध्य (x_i)	विचलन $d_i = x_i - Ax$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	वारंवारता (f_i)	$f_i u_i$
------	-----------------------	---------------------------	-----------------------	---------------------	-----------

$$\text{सूत्र : मध्य} = \bar{X} = A + g \bar{u}$$

येथे $A =$ गृहीतमध्य

$g = d_i$ या सर्व किमतींचा मसावि

$$\bar{u}_i = \frac{\sum f_i u_i}{N}$$

B) मध्यक : दिलेल्या सामग्रीचे दोन समान भागात विभाजन करणाऱ्या बिंदूला मध्यक असे म्हणतात थोडक्यात मध्यक हा सामग्रीचा मध्यबिंदू असतो. मध्यक काढण्यासाठी दिलेले वर्ग सलग नसतील तर ते सलग करून घ्यावे लागतात.

मध्यक काढण्यासाठी पुढीलप्रमाणे वारंवारता वितरण सारणी तयार करावी.

वर्ग	सलग केलेले वर्ग (दिलेले वर्ग सलग नसतील तर)	वारंवारता (f_i)	संचित वारंवारता पेक्षा कमी
------	---	---------------------	-------------------------------

$$\text{सूत्र : मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

येथे

L = मध्यक वर्गाची खालची सीमा (वर्गमर्यादा)

N = एकूण वारंवारता

h = मध्यक वर्गाचे वर्गांतर

f = मध्यक वर्गाची वारंवारता

cf = मध्यक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता

मध्यक वर्ग : ज्या वर्गात सर्वप्रथम निम्मी किंवा निम्म्याहून जास्त $\left(\frac{N}{2}\right)$ संचित वारंवारता (पेक्षा कमी) दिसते तो वर्ग म्हणजे 'मध्यक वर्ग' होय.

C) बहुलक : बहुलक म्हणजे, दिलेल्या प्राप्तांकात जास्तीत जास्त वेळा येणारा प्राप्तांक होय.

बहुलक काढण्यासाठी दिलेले वर्ग सलग नसतील, तर ते सलग करून घ्यावे लागतात.

बहुलक काढण्यासाठी पुढीलप्रमाणे वारंवारता वितरण सारणी तयार करावी.

वर्ग	सलग केलेले वर्ग (दिलेले वर्ग सलग नसतील तर)	वारंवारता
------	---	-----------

$$\text{सूत्र : बहुलक} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

येथे, L = बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा

f_1 = बहुलकीय वर्गाची वारंवारता

f_0 = बहुलकीय वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची वारंवारता

f_2 = बहुलकीय वर्गाच्या पुढच्या वर्गाची वारंवारता

h = बहुलकीय वर्गाचे वर्गांतर

बहुलकीय वर्ग : ज्या वर्गाची वारंवारता सर्वांत जास्त असते त्या वर्गास 'बहुलकीय वर्ग' असे म्हणतात.

• आलेख पद्धतीने सामग्रीचे सादरीकरण

A) आयतालेख B) वारंवारता बहुभुज

A) आयतालेख :

आयतालेख काढण्याची पद्धत :

- 1) वर्ग सलग दिलेले नसल्यास ते सलग करून घ्या.
- 2) सलग केलेले/दिलेले वर्ग X – अक्षावर योग्य प्रमाण घेऊन दर्शवा. (सामान्यतः X अक्षाकरता वर्गांतर हेच योग्य प्रमाण असते.)
- 3) Y – अक्षावर वारंवारता योग्य प्रमाण घेऊन दर्शवा.
- 4) X – अक्षावर प्रत्येक वर्ग हा पाया घेऊन त्यावर आयत काढा. आयताची उंची त्या वर्गाच्या संगत वारंवारता एवढी घ्या.
- 5) आरंभबिंदूपासून पहिल्या वर्गापर्यंत कोणतीही निरीक्षणे नाहीत हे दर्शवण्यासाठी X – अक्षावर आरंभबिंदू आणि पहिला वर्ग यांच्यामध्ये $\text{—}\backslash\text{—}$ (अक्षसंकोच) ही खूण करा.

B) वारंवारता बहुभुज : वारंवारता बहुभुज काढण्याच्या दोन पद्धती आहेत.

A) आयतालेखाच्या मदतीने B) आयतालेख न वापरता

A) आयतालेखाच्या मदतीने वारंवारता बहुभुज काढणे.

- i) दिलेल्या वारंवारता वितरण सारणीवरून आयतालेख काढा.
- ii) आयतालेखातील प्रत्येक आयताच्या वरच्या बाजूचा मध्यबिंदू दर्शवा.
- iii) पहिल्या आयताच्या आधी शून्य उंचीचा आयत आहे असे माना व त्याचा मध्यबिंदू दर्शवा. तसेच शेवटच्या आयतानंतर एक शून्य उंचीचा आयत मानून त्याच्याही मध्यबिंदूवर खूण करा. हे दोन्ही बिंदू X अक्षावर येतील.)
- iv) सर्व मध्यबिंदू क्रमाने सरळ रेषांनी जोडा.

B) आयतालेख न काढता वारंवारता बहुभुज काढणे.

- i) दिलेले वर्ग सलग नसतील, तर सलग करून घ्या.
- ii) ते सलग केलेले/दिलेले वर्ग X – अक्षावर योग्य प्रमाण घेऊन दर्शवा.
- iii) Y – अक्षावर वारंवारता योग्य प्रमाण घेऊन दर्शवा.
- iv) आयतालेख न काढता, वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी बिंदूचे निर्देशक कसे ठरवतात हे खालील सारणीवरून समजून घ्या.

वर्ग	सलग वर्ग	वर्गमध्य	वारंवारता	बिंदूचे निर्देशक
6 - 7	5.5 -7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 -9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 -11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 - 13	11.5 -13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 -15.5	14.5	15	(14.5, 15)
16 - 17	15.5 -17.5	16.5	0	(16.5, 0)

वरील सारणीतील पाचव्या स्तंभातील निर्देशकांशी संगत बिंदू आलेखावर स्थापन करतात. ते क्रमाने सरळ रेषांनी जोडले, की वारंवारता बहुभुज मिळतो.

• चित्ररूप पद्धतीने सामग्रीचे सादरीकरण :

वृत्तालेख :

वृत्तालेख काढण्याची पद्धत :

- 1) योग्य त्रिज्येचे वर्तुळ काढा, त्याची विभागणी प्रमाणबद्ध वर्तुळ पाकळ्यांत करावी.
- 2) प्रत्येक घटकांशी संबंधित वर्तुळ पाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप खालील सूत्राने काढतात.

$$\text{वर्तुळपाकळीचे केंद्रीय कोनाचे माप} = \theta = \frac{\text{त्या घटकातील संख्या}}{\text{सर्व घटकातील एकूण संख्या}} \times 360^\circ$$

- 3) सामग्रीत जेवढे घटक आहेत तेवढ्या वर्तुळपाकळ्यात वर्तुळाचे विभाजन करतात.

प्र. 1 अ) –

- 1) वर्गीकृत वारंवारता सारणीतील संचित वारंवारतेचा उपयोग काढण्यासाठी होतो.

A) मध्य B) मध्यक C) बहुलक D) यापैकी सर्व

उकल : B

2) वर्गीकृत वारंवारता सारणीतील सामग्रीचा मध्य काढण्यासाठीच्या पुढील सूत्रात

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g \text{ मध्ये } u_i = ?$$

- A) $\frac{x_i + A}{g}$ B) $(x_i - A)$ C) $\frac{x_i - A}{g}$ D) $\frac{A - x_i}{g}$

उकल : C

सरावासाठी उदाहरणे

1) दिलेल्या प्राप्तांकात जास्तीत जास्त वेळा येणारा प्राप्तांक म्हणजे

- A) मध्य B) मध्यक C) बहुलक D) सरासरी

प्रत्येक विद्यार्थ्याने लावलेली झाडे	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12
विद्यार्थी संख्या	7	8	6	4

वरील वारंवारता सारणीतील सामग्रीसाठी वारंवारता बहुभुज काढायचा आहे. 4-6 या वर्गातील विद्यार्थी दर्शवण्यासाठीच्या बिंदूचे निर्देशक आहे.

- A) (4, 8) B) (6, 8) C) (5, 8) D) (8, 4)

3) खालीलपैकी कोणते आलेख पद्धतीने सामग्रीचे सादरीकरण आहे?

- A) स्तंभालेख B) आयतालेख C) वृत्तालेख D) यापैकी सर्व

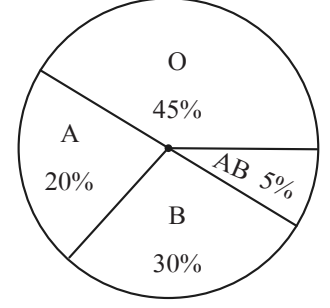
प्र. 1 ब) खालील उपप्रश्न सोडवा.

1) 20-24 या वर्गाचा वर्गमध्य किती?

$$\begin{aligned} \text{उकल : वर्गमध्य} &= \frac{\text{खालची वर्गमर्यादा} + \text{वरची वर्गमर्यादा}}{2} \\ &= \frac{20 + 24}{2} \\ &= \frac{44}{2} \\ &= 22 \end{aligned}$$

∴ 20-24 या वर्गाचा वर्गमध्य 22 आहे.

- 2) रक्तगटानुसार व्यक्तींची टक्केवारी दर्शवणारा वृत्तालेख पुढे दिला आहे. त्यावरून रक्तगट A साठीच्या वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप किती ?



उकल :

$$\begin{aligned} \text{रक्तगट A साठी केंद्रीय कोनाचे माप} &= \frac{\text{रक्तगट A असलेल्या व्यक्तींची टक्केवारी}}{\text{एकूण टक्केवारी}} \times 360^\circ \\ &= \frac{5}{100} \times 360^\circ \\ &= 18^\circ \end{aligned}$$

सरावासाठी उदाहरणे

- 1) जर $\sum f_i x_i = 75$ आणि $\sum f_i = 15$ तर मध्य $\bar{X} = ?$
- 2) 35 - 45 या वर्गाचे वर्गांतर काढा.
- 3) जर $\sum f_i d_i = 108$ आणि $\sum f_i = 100$ तर $\bar{d} = ?$

प्र. 2 अ) खालीलपैकी कोणत्याही दोन कृती पूर्ण करून पुन्हा लिहा.

- 1) एका गावात विविध स्थानांना दररोज होणारा वीजपुरवठा खालील सारणीत दर्शवला आहे. ही माहिती वृत्तालेखाने दर्शवण्यासाठी प्रत्येक घटक दर्शवणाऱ्या वर्तुळपाकळीचे माप केंद्रीय कोनाचे माप ठरवायचे आहे, तर ते माप काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

स्थाने	वीजपुरवठा (हजार एकक)	केंद्रीय कोनाचे माप
रस्ते	4	$\frac{4}{30} \times 360^\circ = 48^\circ$
कारखाने	12	$\frac{\quad}{\quad} \times 360^\circ = 144^\circ$
दुकाने	6	$\frac{6}{30} \times 360^\circ = \square$
घरे	8	$\frac{\quad}{\quad} \times 360^\circ = \square$
एकूण	30	

उकल :

स्थाने	वीजपुरवठा (हजार एकक)	केंद्रीय कोनाचे माप
रस्ते	4	$\frac{4}{30} \times 360^\circ = 48^\circ$
कारखाने	12	$\frac{12}{30} \times 360^\circ = 144^\circ$
दुकाने	6	$\frac{6}{30} \times 360^\circ = 72^\circ$
घरे	8	$\frac{8}{30} \times 360^\circ = 96^\circ$
एकूण	30	

- 1) वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी आवश्यक बिंदूचे निर्देशक ठरवणारी खालील सारणी तयार करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

वर्ग	18-19	19-20	20-21	<input type="text"/>
वर्गमध्य	18.5	19.5	<input type="text"/>	21.5
वारंवारता	4	<input type="text"/>	15	19
बिंदूचे निर्देशक	<input type="text"/>	(19.5,13)	(20.5, 15)	(21.5,19)

उकल :

वर्ग	18-19	19-20	20-21	<input type="text" value="21-22"/>
वर्गमध्य	18.5	19.5	<input type="text" value="20.5"/>	21.5
वारंवारता	4	<input type="text" value="13"/>	15	19
बिंदूचे निर्देशक	<input type="text" value="18.5,4"/>	(19.5,13)	(20.5, 15)	(21.5,19)

सरावासाठी उदाहरणे

- 1) दिलेल्या वारंवारता सारणीवरून 'पेक्षा कमी' संचित वारंवारता वितरण सारणी तयार करण्याकरता खालील कृती पूर्ण करा.

वर्ग	वारंवारता	संचित वारंवारता (पेक्षा कमी)
0-10	4	4
10-20	8	<input type="text"/>
<input type="text"/>	10	22
30-40	<input type="text"/>	27
40-50	3	<input type="text"/>

- 2) वर्गातील 25 विद्यार्थ्यांनी पूग्रस्तांसाठी जमवलेल्या निधीची वारंवारता सारणी पुढे दिली आहे. त्यावरून जमा केलेल्या निधीचा मध्य 'सरळ पद्धती' ने काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

निधी (रुपये)	वर्गमध्य (x_i)	विद्यार्थी (f_i)	$x_i f_i$
0-10	5	5	25
<input type="text"/>	15	<input type="text"/>	30
20-30	<input type="text"/>	6	150
30-40	35	5	175
40-50	45	7	<input type="text"/>

- 3) एका गावातील विविध पिकांचे कृषिक्षेत्र पुढे दिले आहे. ही माहिती वृत्तालेखाने दर्शवण्यासाठी प्रत्येक घटक दर्शवणाऱ्या वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप ठरवायचे आहे, तर ते माप काढण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

पीके	कृषिक्षेत्र (हेक्टरमध्ये)	केंद्रीय कोनाचे माप
ज्वारी	40	$\frac{40}{180} \times 360 = 80^\circ$
बाजरी	60	$\frac{60}{180} \times 360 = 120^\circ$
ऊस	50	$\frac{50}{180} \times 360 = \square$
भाजीपाला	30	$\frac{30}{180} \times 360 = \square$
एकूण	180	

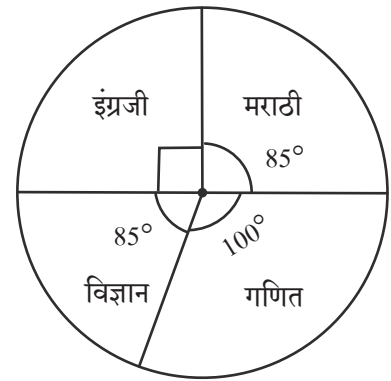
ब) खालीलपैकी कोणतेही चार उपप्रश्न सोडवा.

- 1) एका विद्यार्थ्याने विविध विषयांत 100 पैकी मिळवलेले गुण दिले आहेत ही माहिती वृत्तालेखाद्वारे दाखवा :

विषय	गुण
मराठी	85
इंग्रजी	90
विज्ञान	85
गणित	100
एकूण	360

उकल :

विषय	गुण	केंद्रीय कोनाचे माप
मराठी	85	$\frac{85}{360} \times 360^\circ = 85^\circ$
इंग्रजी	90	$\frac{90}{360} \times 360^\circ = 90^\circ$
विज्ञान	85	$\frac{85}{360} \times 360^\circ = 85^\circ$
गणित	100	$\frac{100}{360} \times 360^\circ = 100^\circ$
एकूण	360	



- 2) निबंध स्पर्धेतील स्पर्धकांनी लिहिलेली शब्दसंख्या पुढील सारणीत दिली आहे. त्यावरून 'गृहीतमध्य' पद्धतीने लिहिलेल्या शब्दसंख्येचा मध्य काढा.

शब्दसंख्या	600-800	800-1000	1000-1200	1200-1400	1400-1600
स्पर्धकांची संख्या	14	22	30	18	16

उकल :

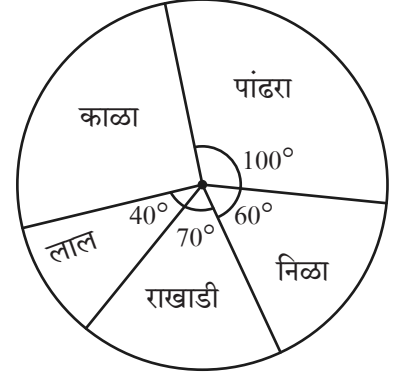
शब्दसंख्या	वर्गमध्य (x_i)	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1100$	स्पर्धकांची संख्या (f_i)	$f_i d_i$
600-800	700	- 400	14	- 5600
800-1000	900	- 200	22	- 4400
1000-1200	1100 - A	0	30	0
1200-1400	1300	200	18	3600
1400-1600	1500	400	16	6400
			$\sum f_i = N = 100$	$\sum f_i d_i = 0$

$$\begin{aligned} \text{आता, } \bar{d} &= \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \\ &= \frac{0}{100} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{शब्द संख्येचा मध्य } \bar{X} &= A + \bar{d} \\ &= 1100 + 0 \\ &= 1100 \end{aligned}$$

सरावासाठी उदाहरणे

1) एका दुकानात दुचाकींच्या खरेदीसाठी रंगांची पसंती खालील वृत्तालेखात दर्शवली आहे. जर एकूण 36 दुचाकींची खरेदी झाली असेल तर त्याच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या.



1) काळ्या रंगाच्या दुचाकी दर्शवणाऱ्या वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप ठरवा.

2) काळ्या रंगाच्या किती दुचाकी खरेदी केलेल्या आहेत?

2) जर $\sum x_i f_i = 1265$ आणि $N = 50$ तर मध्य $= \bar{X} = ?$

3) खालील वारंवारता सारणीचे निरीक्षण करा आणि मध्य काढा.

गृहीत मध्य = $A = 300$

वर्ग	वर्गमध्य (x_i)	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 300$	$u_i = \frac{d_i}{f}$	वारंवारता f_i	$f_i x_i u_i$
200-240	220	-80	-2	5	-10
240-280	260	-40	-1	10	-10
290-320	300 - A	0	0	15	0
320-360	340	40	1	12	12
360-400	380	80	2	8	16
एकूण				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 8$

प्र. 3 अ) खालीलपैकी कोणतीही एक कृती पूर्ण करा आणि पुन्हा लिहा.

1) खालील सारणीत एका सॉफ्टवेअर कंपनीतील दैनंदिन कामाचे तास व तेवढा वेळ काम करणाऱ्या कर्मचाऱ्यांची संख्या दिली आहे. त्यावरून कंपनीतील कर्मचाऱ्यांच्या दैनंदिन कामाच्या तासांचे मध्यक काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.

दैनंदिन कामाचे तास	कर्मचाऱ्यांची संख्या	संचित वारंवारता (पेक्षा कमी)
8-10	150	150
10-12	500	<input type="text"/>
12-14	300	950
14-16	50	<input type="text"/>

येथे,

$$L = 10, \quad \frac{N}{2} = \boxed{}, \quad cf = 150, \quad h = 2, \quad f = \boxed{}$$

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h \dots\dots\dots (\text{सूत्र})$$

$$= 10 + \left[\frac{500 - 150}{500} \right] \times 2 \dots\dots\dots (\text{दिलेल्या किमती ठेवून})$$

$$= 10 + \frac{\boxed{}}{5} = 10 + \boxed{} = 11.4$$

∴ दैनंदिन कामाच्या तासांचे मध्यक = 11.4

उकल :

दैनंदिन कामाचे तास	कर्मचाऱ्यांची संख्या	संचित वारंवारता (पेक्षा कमी)
8-10	150	150
10-12	500	<input type="text" value="650"/>
12-14	300	950
14-16	50	<input type="text" value="1000"/>

येथे,

$$L = 10, \quad \frac{N}{2} = \boxed{500}, \quad cf = 150, \quad h = 2, \quad f = \boxed{500}$$

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h \dots\dots\dots (\text{सूत्र})$$

$$= 10 + \left[\frac{500 - 150}{500} \right] \times 2 \dots\dots\dots (\text{दिलेल्या किमती ठेवून})$$

$$= 10 + \frac{\boxed{7}}{5} = 10 + \boxed{1.4} = 11.4$$

∴ दैनंदिन कामाच्या तासांचा मध्यक = 11.4

- 2) खालील वारंवारता वितरण सारणीत एका पेट्रोलपंपावर पेट्रोल भरणाऱ्या वाहनांची संख्या आणि वाहनांमध्ये भरलेले पेट्रोल याची माहिती दिली आहे. त्यावरून वाहनात भरलेल्या पेट्रोलच्या आकारमानाचे बहुलक काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

वर्ग [वाहनात भरलेले पेट्रोल (लीटर)]	वारंवारता (वाहनांची संख्या)
0.5 - 3.5	33
3.5 - 6.5	40
6.5 - 9.5	27
9.5 - 12.5	18
12.5 - 15.5	12

कृती : दिलेल्या वारंवारता वितरण सारणीवरून,

$$\text{बहुलकीय वर्ग} = \boxed{}$$

$$\therefore \text{बहुलक} = \boxed{} + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - \boxed{}} \right] \times h \dots\dots\dots (\text{सूत्र})$$

$$= 3.5 + \left[\frac{40 - 33}{2(40) - 33 - 27} \right] \times \boxed{} \dots\dots\dots (\text{दिलेल्या किमती ठेवून})$$

$$= 3.5 + \left[\frac{7}{80 - 60} \right] \times 3$$

$$\therefore \text{बहुलक} = \boxed{}$$

$$\therefore \text{वाहनात भरलेल्या पेट्रोलच्या आकारमानाचा बहुलक} = \boxed{} \text{ लीटर}$$

उकल : दिलेल्या वारंवारता वितरण सारणीवरून,

$$\text{बहुलकीय वर्ग} = \boxed{3.5 - 6.5}$$

$$\therefore \text{बहुलक} = \boxed{L} + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - \boxed{f_2}} \right] \times h \dots\dots\dots (\text{सूत्र})$$

$$= 3.5 + \left[\frac{40 - 33}{2(40) - 33 - 27} \right] \times \boxed{3} \dots\dots\dots (\text{दिलेल्या किमती ठेवून})$$

$$= 3.5 + \left[\frac{7}{80 - 60} \right] \times 3$$

$$\therefore \text{बहुलक} = \boxed{4.55}$$

वाहनात भरलेल्या पेट्रोलच्या आकारमानाचा बहुलक $\boxed{4.55}$ लीटर

सरावासाठी उदाहरणे

- 1) विविध कारखान्यांमध्ये उत्पादन होणाऱ्या दिव्यांची संख्या खालील सारणीत दिली आहे. त्यावरून दिव्यांच्या उत्पादनाचा मध्यक काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.

दिव्यांची संख्या (हजार)	कारखान्यांची संख्या	संचित वारंवारता (पेक्षा कमी)
30-40	12	12
40-50	35	47
50-60	20	67
60-70	15	82
70-80	8	90
80-90	7	97
90-100	8	105

दिलेल्या वारंवारता वितरण सारणीवरून,

$$\text{मध्यक वर्ग} = \boxed{}$$

$$\therefore \text{मध्यक} = L + \left[\frac{\boxed{} - cf}{\boxed{}} \right] \times h \dots\dots\dots (\text{सूत्र})$$

$$= 50 + \left[\frac{52.5 - \boxed{}}{20} \right] \times 10 \dots\dots\dots (\text{दिलेल्या किमती ठेवून})$$

$$= 50 + \frac{55}{20}$$

$$\therefore \text{मध्यक} = \boxed{}$$

$$\therefore \text{दिव्यांच्या उत्पादनाचा मध्यक} = \boxed{}$$

- 2) खालील वारंवारता वितरण सारणीत क्रीडांगणावर खेळायला येणाऱ्या मुलांची संख्या व त्यांचे वयोगट दिले आहेत. त्यावरून क्रीडांगणावर खेळणाऱ्या मुलांच्या वयाचे बहुलक काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.

मुलांचा वयोगट (वर्षे)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
मुलांची संख्या	43	58	70	42	27

कृती :

येथे $L = 10$, $f_0 = \square$, $f_1 = 70$, $f_2 = 42$, $h = 2$

$$\therefore \text{बहुलक} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{\square - f_0 - f_2} \right] \times h \dots\dots\dots (\text{सूत्र})$$

$$= 10 + \left[\frac{70 - 58}{2(70) - 58 - 42} \right] \times 2 \dots\dots\dots (\text{दिलेल्या किमती ठेवून})$$

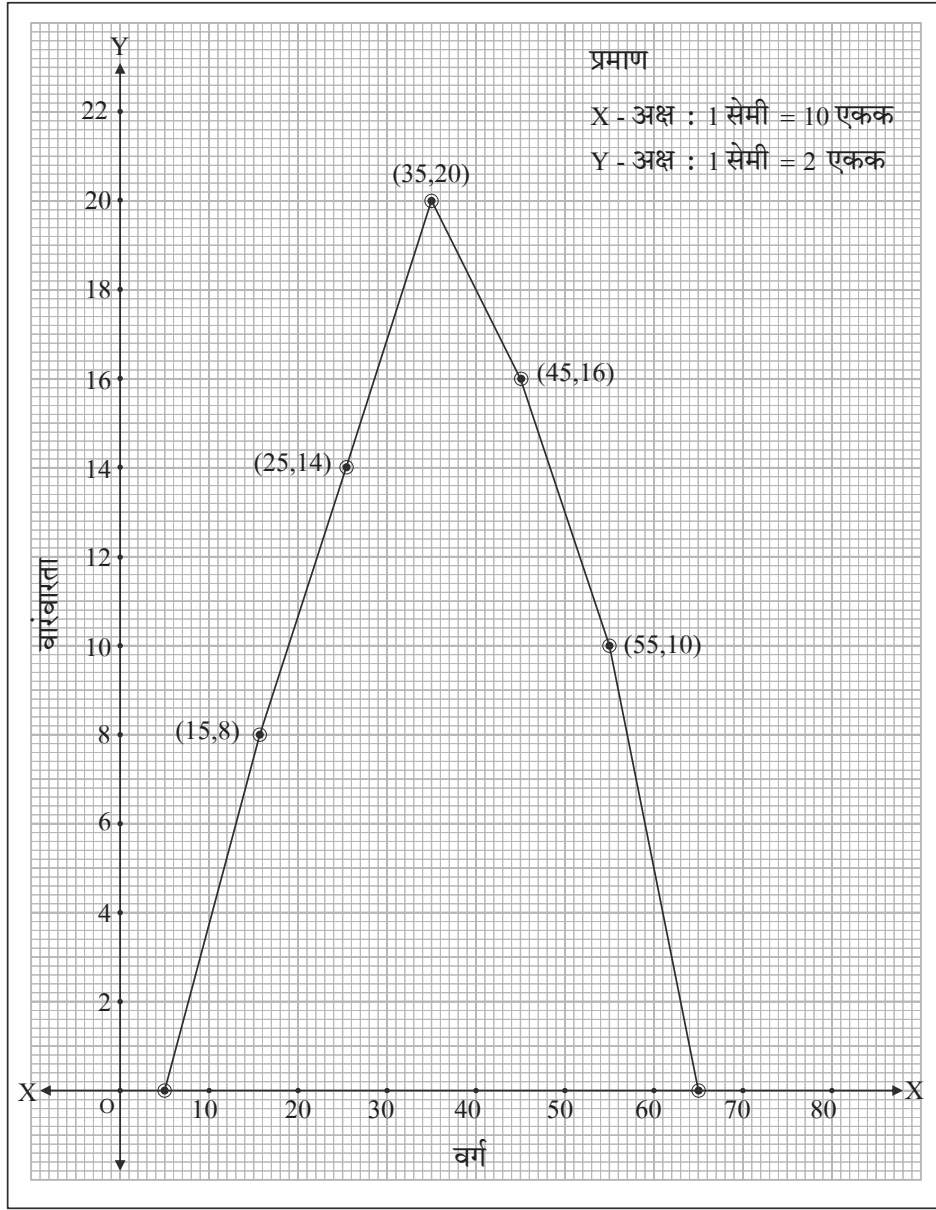
$$\therefore \text{मध्यक} = 10 + \frac{12}{\square} \times 2$$

$$= 10 + \frac{24}{\square}$$

$$= \square$$

$$\therefore \text{क्रीडांगणावर खेळणाऱ्या मुलांच्या वयाचे बहुलक} = \square \text{ वर्षे}$$

3) सोबतच्या आकृतीत दाखवलेल्या वारंवारता बहुभुजाच्या आधारे खालील कृती पूर्ण करा.



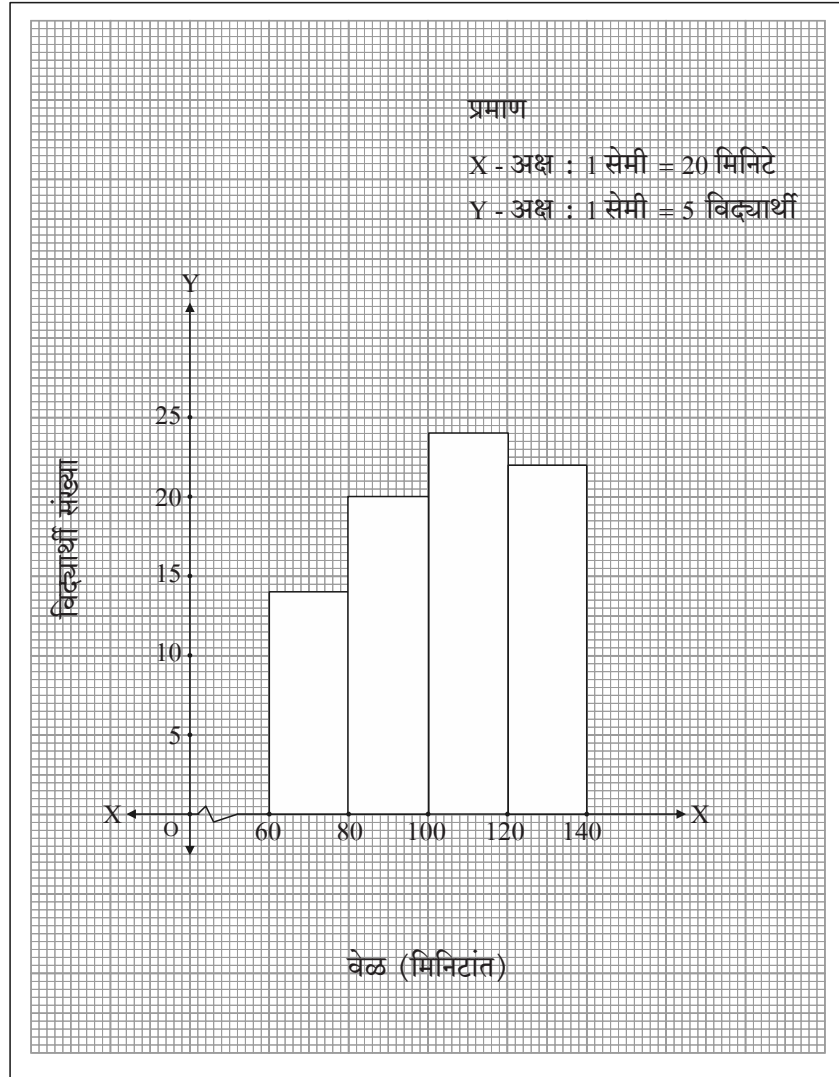
- 1) 50-60 या वर्गाची वारंवारता लिहा.
- 2) सर्वाधिक वारंवारता असलेला वर्ग लिहा.
- 3) वर्गमध्य 55 असलेला वर्ग लिहा.
- 4) ज्या वर्गाची वारंवारता 14 आहे असा वर्ग लिहा.
- 5) ज्या वर्गाची वारंवारता 0 आहे असा कोणताही एक वर्ग लिहा.
- 6) ज्या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा 30 आहे त्या वर्गाची वरची वर्गमर्यादा लिहा.

ब) खालीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा.

1) खालील सारणीत विद्यार्थ्यांनी परीक्षेच्या तयारीसाठी दिलेला वेळ दर्शवला आहे. त्यावरून आयतालेख काढा.

वेळ (मिनिटांत)	60-80	80-100	100-120	120-140
विद्यार्थी संख्या	14	20	24	22

उकल :



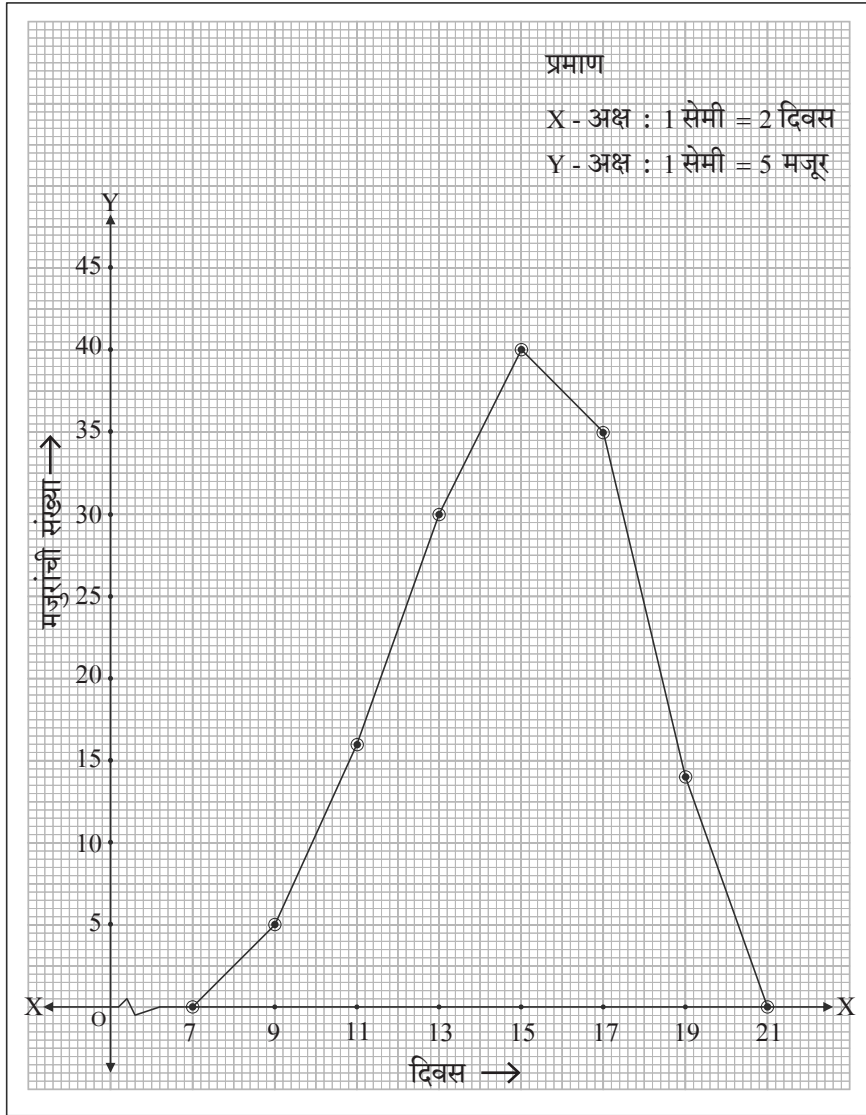
2) एका हातमाग कारखान्यात मजुरांना एक साडी बनवण्यास लागणारे दिवस आणि मजुरांची संख्या यांची वर्गीकृत वारंवारता सारणी दिली आहे. या सामग्रीसाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

दिवस	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
मजुरांची संख्या	5	16	30	40	35	14

उकल :

दिवस	वर्गमध्य	मजुरांची संख्या	बिंदूचे निर्देशक
6-8	7	0	(7, 0)
8-10	9	5	(9, 5)
10-12	11	16	(11, 16)
12-14	13	30	(13, 30)
14-16	15	40	(15, 40)
16-18	17	35	(17, 35)
18-20	19	14	(19, 14)
20-22	21	0	(21, 0)

सरावासाठी उदाहरणे



- 1) खालील वारंवारता वितरण सारणीसाठी आयतालेख काढून वारंवारता बहुभुज काढा.

सरासरी पाऊस (सेंटिमीटर)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
गावांची संख्या	2	5	8	12	10	7

- 2) एका परीक्षेत गणित विषयात विद्यार्थ्यांनी मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत.

मिळवलेले गुण	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थी संख्या	3	8	15	17	7

वरील वारंवारता वितरणासाठी आयतालेख काढा.

- 3) खालील वर्गीकृत वारंवारता वितरणासाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

वीजबील (₹ मध्ये)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
कुटुंबांची संख्या	240	300	450	350	160



भाग - 2

1. समरूपता

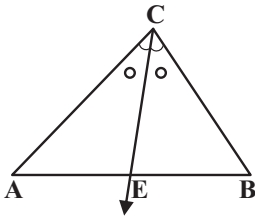
पूर्वज्ञान :

$$1) \frac{A(\Delta_1)}{A(\Delta_2)} = \frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$$

$$2) \frac{A(\Delta_1)}{A(\Delta_2)} = \frac{b_1}{b_2} \text{ जर } h_1 = h_2$$

$$3) \frac{A(\Delta_1)}{A(\Delta_2)} = \frac{h_1}{h_2} \text{ जर } b_1 = b_2$$

4) ΔABC मध्ये रेख $DE \parallel$ रेख BC तर असेल, तर $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{EC}$ प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय

5)  ΔABC मध्ये $\angle C$ चा दुभाजक रेख AB ला E बिंदूत छेदतो,
तर $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

6) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ असेल, तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$

7) जर $\Delta_1 \sim \Delta_2$ असेल, तर $\frac{A(\Delta_1)}{A(\Delta_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ h - उंची, b - पाया, s - बाजू

उदाहरणे :

प्र. 1 अ) पुढील प्रश्नांचे योग्य पर्याय निवडून अचूक वर्णाक्षर लिहा.

1) दोन समरूप त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ 9 सेमी² आणि 16 सेमी² असेल, तर त्यांच्या संगत उंचीचे गुणोत्तर पुढीलपैकी कोणते असेल?

(A) 9 : 16 (B) 3 : 4 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

उत्तर : (B)

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \text{ असेल तर, } \frac{A(\Delta_1)}{A(\Delta_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$\therefore \frac{9}{16} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$\therefore \frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore h_1 : h_2 = 3 : 4$$

2) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ आणि $\angle A = 45^\circ$, $\angle Q = 87^\circ$, तर $m\angle C = \dots\dots\dots$

- (A) 45° (B) 87° (C) 48° (D) 90°

उत्तर : (C)

त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांच्या मापांच्या बेरजेच्या गुणधर्मानुसार,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 87^\circ)$$

$$\angle C = 48^\circ$$

3) जर $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ आणि $\angle A = 48^\circ$, तर $m\angle D = \dots\dots\dots$

- (A) 48° (B) 83° (C) 49° (D) 132°

प्र. 1 ब) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

1) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 80$, $A(\Delta PQR) = 125$, तर $AB : PQ$ शोधा.

उत्तर : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{80}{125} = \frac{AB^2}{PQ^2} \dots\dots\dots$ समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांची गुणोत्तरे

$$\therefore \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$$

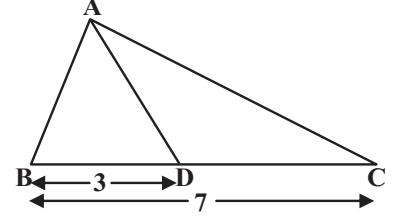
$$\therefore AB : PQ = 4 : 5$$

2) दिलेल्या आकृतीमध्ये $BC = 7$, $BD = 3$ असेल तर,

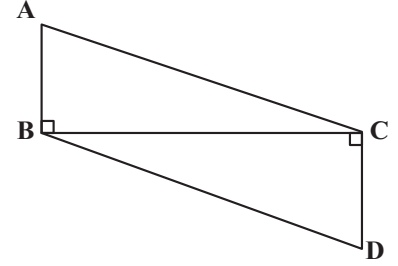
$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ हे गुणोत्तर शोधा.

उत्तर : $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$ समान उंचीचे त्रिकोण

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{3}{7} \quad \therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{3}{7}$$



3) दिलेल्या आकृतीमध्ये, बाजू $AB \perp$ बाजू BC आणि बाजू $DC \perp$ बाजू BC जर $AB = 3$ सेमी आणि $CD = 4$ सेमी असेल, तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ शोधा.

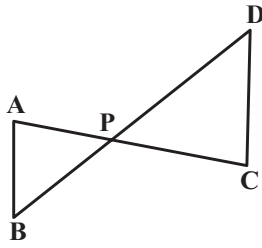


4) दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर $3 : 5$ आहे, तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

- 5) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, आणि $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{16}{25}$ असेल, तर $AB : PQ$ या गुणोत्तराची किंमत शोधा.

प्र. 2 अ) खालील कृती पूर्ण करा.

1)



दिलेल्या आकृतीमध्ये,

रेख AC आणि रेख BD एकमेकांना बिंदू P मध्ये छेदतात.

जर $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ असेल, तर $\Delta ABP \sim \Delta CDP$ दाखविण्यासाठी

पुढील कृती पूर्ण करा.

कृती : ΔAPB आणि ΔCDP मध्ये,

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP} \dots\dots\dots \boxed{}$$

$$\therefore \angle APB = \boxed{} \dots\dots\dots \text{विरुद्ध कोन}$$

$$\therefore \boxed{} \sim \Delta APB \dots\dots\dots \boxed{} \text{ समरूपता कसोटीनुसार}$$

उत्तर : ΔAPB आणि ΔCDP मध्ये,

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP} \dots\dots\dots \boxed{\text{पक्ष}}$$

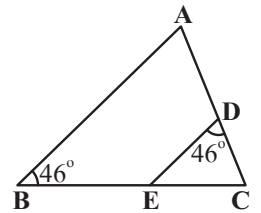
$$\therefore \angle APB = \boxed{\angle CPD} \dots\dots\dots \text{विरुद्ध कोन}$$

$$\therefore \boxed{\Delta ABP} \sim \Delta CDP \dots\dots\dots \boxed{\text{बाकोबा}} \text{ समरूपता कसोटीनुसार}$$

- 2) पुढील आकृतीचे निरीक्षण करून खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : ΔABC आणि ΔEDC मध्ये,

$$\therefore \angle ABC \cong \angle \boxed{} \dots\dots\dots \text{प्रत्येकी } 46^\circ$$



$$\therefore \angle C \cong \angle C \dots\dots\dots \left(\boxed{\dots\dots\dots} \right)$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta \boxed{\dots\dots\dots} \dots\dots \left(\boxed{\dots\dots\dots} \text{समरूपता कसोटीनुसार} \right)$$

3) ΔABC मध्ये, रेख $DE \parallel$ रेख BC

जर $AD = 6$ सेमी $DB = 9$ सेमी आणि $EC = 7.5$ सेमी असेल, तर AE शोधण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

कृती : ΔABC मध्ये,

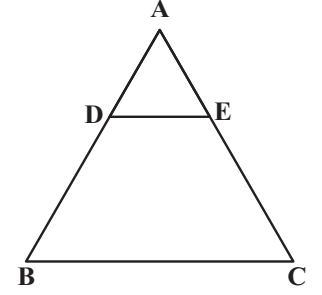
रेख $DE \parallel$ बाजू $BC \dots\dots\dots$ (पक्ष)

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \dots\dots\dots \boxed{\dots\dots\dots}$$

$$\therefore \frac{6}{9} = \frac{AE}{\boxed{\dots\dots\dots}}$$

$$\therefore AE = \frac{6 \times 7.5}{\boxed{\dots\dots\dots}}$$

$$\therefore AE = \boxed{\dots\dots\dots}$$



प्र. 2 ब) खालील उपप्रश्न सोडवा.

1) $\Delta LMN \sim \Delta RST$, $LM = 3$, $MN = 4$, $ST = 12$, तर RS शोधा.

उत्तर : समरूप त्रिकोणांच्या बाजू प्रमाणात असतात.

$$\frac{LM}{RS} = \frac{MN}{ST}$$

$$\therefore \frac{3}{RS} = \frac{4}{12}$$

$$\therefore RS = \frac{3 \times 12}{4}$$

$$\therefore \boxed{RS = 9 \text{ एकक}}$$

2) $\Delta LMN \sim \Delta PQR$, $9A(\Delta PQR) = 16A(\Delta LMN)$, तर MN शोधा.

उत्तर : $\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta PQR)} = \frac{9}{16} = \frac{MN^2}{QR^2}$ समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर

$$\therefore \frac{MN^2}{QR^2} = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \frac{MN}{QR} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{MN}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore MN = \frac{3 \times 20}{4}$$

$$\therefore MN = 15 \text{ एकक}$$

3) ΔABC आणि ΔDEF हे समभुज त्रिकोण आहेत. जर $A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 1 : 2$ आणि $AB = 4$, तर DE काढा.

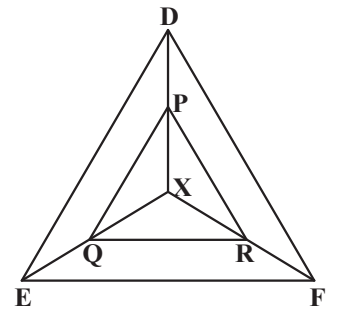
4) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 81 \text{ सेमी}^2$, $A(\Delta PQR) = 121 \text{ सेमी}^2$ जर $BC = 6.3 \text{ सेमी}$ असेल, तर QR काढा.

5) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ आणि $AB : PQ = 2 : 3$ तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)}$ ची किंमत शोधा.

6) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $AB : PQ = 4 : 5$ आणि $A(\Delta PQR) = 125$ सेमी² असेल, तर $A(\Delta ABC)$ शोधा.

प्र. 3 अ) पुढील कृती पूर्ण करा.

1) शेजारील आकृतीमध्ये त्रिकोणाच्या अंतर्भागात X हा एक कोणताही बिंदू आहे. बिंदू X हा त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूशी जोडला आहे, तसेच रेख $PQ \parallel$ रेख DE , रेख $QR \parallel$ रेख EF , तर रेख $PR \parallel$ रेख DF हे सिद्ध करण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.



सिद्धता : ΔXDE मध्ये $PQ \parallel DE$ पक्ष

$$\frac{XP}{PD} = \frac{\boxed{}}{QE} \text{ I (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)}$$

ΔXEF मध्ये $QR \parallel EF$ पक्ष

$$\frac{XQ}{\boxed{}} = \frac{XR}{\boxed{}} \text{ II (} \boxed{} \text{)}$$

$$\frac{XP}{PD} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \text{विधान I व II वरून}$$

रेख PR \parallel रेख DE (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

उत्तर : ΔXDE मध्ये PQ \parallel DE पक्ष

$$\frac{XP}{PD} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}} \quad \text{..... I (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)}$$

ΔXEF मध्ये QR \parallel EF पक्ष

$$\frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}} = \frac{XR}{\boxed{RF}} \quad \text{..... II (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)}$$

$$\frac{XP}{PD} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} \quad \text{विधान I व II वरून}$$

रेख PR \parallel रेख DF (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

- 2) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 81$ सेमी², $A(\Delta PQR) = 121$ सेमी², $BC = 6.3$ सेमी, तर QR शोधण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

कृती : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ पक्ष

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\boxed{}}{QR^2} \quad \text{..... (} \boxed{} \text{)}$$

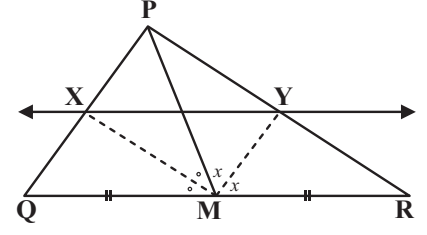
$$\therefore \frac{\boxed{}}{121} = \frac{(6.3)^2}{QR^2}$$

$$\therefore \frac{\boxed{}}{11} = \frac{(6.3)}{QR} \quad \text{..... दोन्ही बाजूंची वर्गमूळे काढून}$$

$$\therefore QR = \frac{6.3 \times 11}{\boxed{}}$$

$$\therefore QR = \boxed{} \text{ सेमी}$$

- 3) ΔPQR मध्ये रेख PM ही मध्यगा आहे. $\angle PMQ$ आणि $\angle PMR$ चे कोनदुभाजक बाजू PQ आणि बाजू PR ला अनुक्रमे बिंदू X आणि बिंदू Y मध्ये छेदतात. तर सिद्ध करा. $XY \parallel QR$
पुढील चौकटी पूर्ण करून सिद्धता पूर्ण करा.



सिद्धता : ΔPMQ मध्ये, किरण MX हा $\angle PMQ$ चा कोनदुभाजक आहे.

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \dots\dots\dots (I) \text{ कोनदुभाजकाचे प्रमेय}$$

ΔPMR मध्ये किरण MY हा $\angle PMR$ चा कोनदुभाजक आहे.

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \dots\dots\dots (II) \text{ कोनदुभाजकाचे प्रमेय}$$

परंतु $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR} \dots\dots\dots$ बिंदू M हा QR चा मध्यबिंदू आहे.

म्हणून $MQ = MR$

$$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$$

$\therefore XY \parallel QR \dots\dots\dots$ प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास.

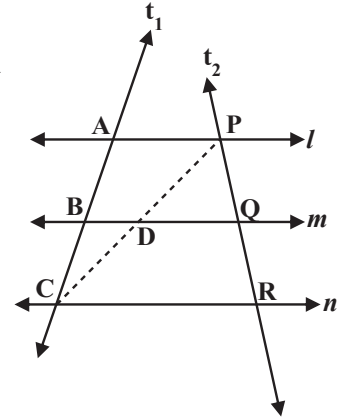
प्र. 3 ब) खालील उपप्रश्न सोडवा.

- 1) तीन समांतर रेषांनी एका छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांचे गुणोत्तर हे त्या रेषांनी दुसऱ्या छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांच्या गुणोत्तराएवढे असते. हे सिद्ध करा.

पक्ष : रेषा $l \parallel$ रेषा $m \parallel$ रेषा n

t_1 व t_2 या त्यांच्या छेदिका आहेत.

t_1 ही छेदिका त्या रेषांना अनुक्रमे A, B, C या बिंदूत छेदते. t_2 ही छेदिका या रेषांना अनुक्रमे P, Q, R या बिंदूत छेदते.



साध्य : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

सिद्धता : रेख PC काढला. हा रेषाखंड रेषा m ला D बिंदूत छेदतो.

ΔACP मध्ये, $BD \parallel AP$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} \quad \dots (I) \text{ (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)}$$

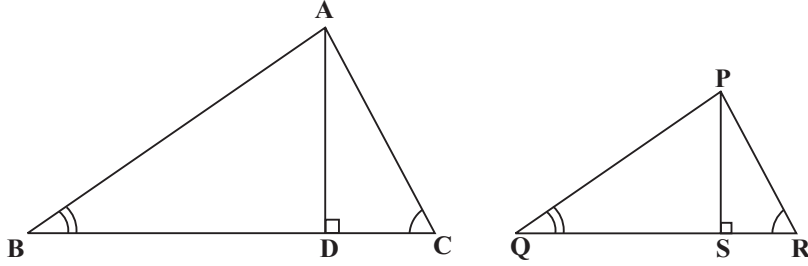
ΔCPR मध्ये $DQ \parallel CR$

$$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR} \quad \dots (II) \text{ (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR} \quad \dots (I) \text{ व } (II) \text{ वरून}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$$

- 2) सिद्ध करा, जर दोन त्रिकोण समरूप असतील, तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत भुजांच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.



पक्ष : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $AD \perp BC$, $PS \perp QR$

$$\text{साध्य} : \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

ΔABD व ΔPQS मध्ये

$$\angle B = \angle Q \quad \dots (पक्ष)$$

$$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$$

\therefore कोको कसोटीनुसार $\Delta ABD \sim \Delta PQS$

$$\therefore \frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ} \quad \dots (II)$$

परंतु $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

(II) व (III) वरून

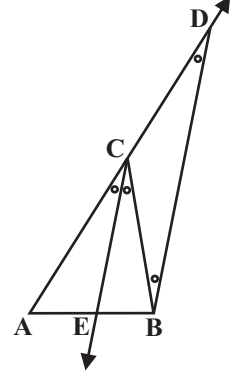
$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

3) सिद्ध करा. त्रिकोणाच्या कोनाचा दुभाजक त्या कोनासमोरील बाजूला उरलेल्या बाजूंच्या लांबींच्या गुणोत्तरात विभागतो.

पक्ष : ΔABC च्या $\angle C$ चा दुभाजक रेषा AB ला E बिंदूत छेदतो.

साध्य : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

रचना : बिंदू B मधून, किरण CE ला समांतर रेषा काढा, ती वाढवलेल्या AC ला बिंदू D मध्ये छेदते.



सिद्धता : किरण $CE \parallel$ किरण BD व रेषा AD ही छेदिका

$\angle ACE \cong \angle CDB$ (संगत कोन) ... (I)

आता BC ही छेदिका घेऊन

$\angle ECB \cong \angle CBD$ (व्युत्क्रम कोन) ... (II)

परंतु $\angle ACE \cong \angle ECB$ (पक्ष) ... (III)

$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB$ विधान (I), (II) आणि (III) वरून

ΔCBD मध्ये, बाजू $CB \cong$ बाजू CD (एकरूप कोनासमोरील बाजू)

$CB = CD$... (IV)

आता, ΔABD मध्ये, रेषा $EC \parallel$ बाजू BD (रचना)

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD}$ (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)... (V)

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$ विधान (IV) आणि (V) वरून

2. पायथागोरसचे प्रमेय

पूर्वज्ञान :

- 1) जर ΔABC मध्ये, $m\angle B = 90^\circ$ असेल, तर $AC^2 = BC^2 + AB^2$
- 2) ΔABC मध्ये, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ असेल, तर $AB = \frac{1}{2} AC$ आणि $BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$
- 3) ΔABC मध्ये, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = \angle C = 45^\circ$ असेल, तर $AB = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} AC$
- 4) ΔABC मध्ये, $\angle B = 90^\circ$, रेषा $BC \perp$ कर्ण AC असेल, तर $BD^2 = AD \times DC$
- 5) ΔABC मध्ये, जर बिंदू D हा बाजू BC चा मध्यबिंदू असेल, तर $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

उदाहरणे :

प्र. 1 अ) पुढील प्रश्नांचे योग्य पर्याय निवडून अचूक वर्णाक्षर लिहा.

- 1) एका काटकोन त्रिकोणामध्ये त्रिकोणाच्या काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज 169 असेल, तर त्याच्या कर्णाची लांबी किती असेल?

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

उत्तर : (B)

काटकोन त्रिकोणासाठी, (कर्ण)² = काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज.

$$\therefore (13)^2 = 169^2$$

$$\therefore \text{कर्ण} = 13$$

- 2) पुढीलपैकी कोणता गट पायथागोरसचे त्रिकूट दर्शवितो?

(A) 1, 5, 10 (B) 3, 4, 5 (C) 2, 2, 2 (D) 5, 5, 2

उत्तर : (B)

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

- 3) पुढीलपैकी कोणती तारीख पायथागोरसचे त्रिकूट दर्शविते?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 03/05/17 (D) 04/09/15

उत्तर :

- 4) जर a, b, c या एका त्रिकोणाच्या बाजू असतील आणि $a^2 + b^2 = c^2$ असेल, तर त्रिकोणाचा प्रकार कोणता असेल ?
- (A) विशालकोन त्रिकोण (B) लघुकोन त्रिकोण
(C) काटकोन त्रिकोण (D) समभूज त्रिकोण

उत्तर :

- 5) ज्याचा कर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी आहे अशा चौरसाची परिमिती किती असेल ?
- (A) 10 सेमी (B) $40\sqrt{2}$ सेमी
(C) 20 सेमी (D) 40 सेमी

उत्तर :

- 6) एका काटकोन त्रिकोणात कर्णावरील शिरोलंबामुळे कर्णाचे 4 सेमी व 9 सेमी लांबीचे दोन भाग होतात, तर त्या शिरोलंबाची लांबी किती ?
- (A) 9 सेमी (B) 4 सेमी (C) 6 सेमी (D) $2\sqrt{6}$ सेमी

उत्तर :

- 7) एका काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 24 सेमी आणि 18 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी काढा.
- (A) 24 सेमी (B) 30 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

उत्तर :

प्र. 1 ब) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

- 1) ΔRST मध्ये, $\angle S = 90^\circ$, $\angle T = 30^\circ$, $RT = 12$ सेमी असेल, तर RS आणि ST ची लांबी काढा.

उत्तर : $RS = \frac{1}{2} RT \dots\dots 30^\circ$ कोनासमोरील बाजू
= 6 सेमी

$ST = \frac{\sqrt{3}}{2} RT \dots\dots 60^\circ$ कोनासमोरील बाजू
= $6\sqrt{3}$ सेमी

2) ज्या चौरसाचा कर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी असेल त्याची बाजू किती असेल?

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : चौरसाची बाजू} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{कर्ण} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10\sqrt{2} \\ \text{चौरसाची बाजू} &= 10 \text{ सेमी}\end{aligned}$$

3) ΔABC मध्ये, जर $AB^2 = AC^2 + CB^2$ असेल, तर ΔABC हा काटकोन त्रिकोण आहे किंवा नाही ते सकारण स्पष्ट करा.

उत्तर :

4) एका त्रिकोणाच्या बाजू जर 7 सेमी, 24 सेमी आणि 25 सेमी असतील, तर तो त्रिकोण काटकोन आहे का? हे सकारण स्पष्ट करा.

उत्तर :

5) आयताच्या बाजू 11 सेमी व 60 सेमी असतील, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

उत्तर :

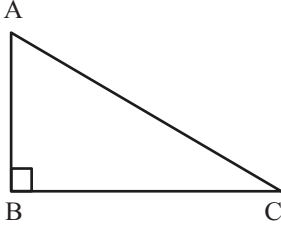
- 6) एका काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी काढा.

उत्तर :

- 7) आयताची लांबी 35 सेमी आणि रुंदी 12 सेमी असेल, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

उत्तर :

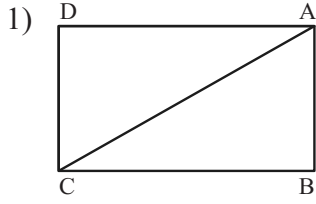
8)



ΔABC मध्ये, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$
जर $AC = 9\sqrt{2}$ तर AB ची लांबी काढा.

उत्तर :

प्र. 2 अ) खालील कृती पूर्ण करा.



दिलेल्या आकृतीमध्ये, □ABCD हा आयत आहे.

जर $AB=5$, $AC=13$ असेल, तर BC ची किंमत काढण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

कृती : $\triangle ABC$ हा त्रिकोण आहे.

\therefore पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore 25 + BC^2 = \text{$$

$$\therefore BC^2 = \text{$$

$$\therefore BC = \text{$$

उत्तर : $\triangle ABC$ हा त्रिकोण आहे.

\therefore पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore 25 + BC^2 = \text{169}$$

$$\therefore BC^2 = \text{144}$$

$$\therefore BC = \text{12 एकक}$$

2) शेजारी दिलेल्या आकृतीमध्ये

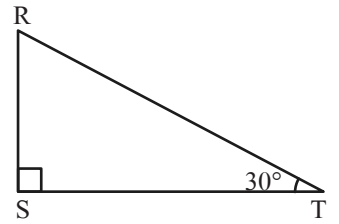
कृती : $\triangle RST$ हा एक त्रिकोण आहे.

$$RS = \text{} \times RT$$

$$RS = 6 \text{ सेमी}$$

$$ST = \text{} \times RT$$

$$ST = \text{} \text{ सेमी}$$



उत्तर : शेजारी दिलेल्या आकृतीमध्ये $\triangle RST$ हा 30° - 60° - 90° त्रिकोण आहे.

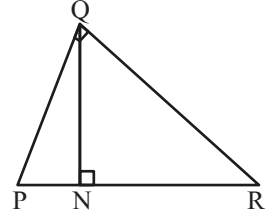
$$\therefore RS = \frac{1}{2} \times RT$$

$$\therefore RS = 6 \text{ सेमी}$$

$$\therefore ST = \frac{\sqrt{3}}{2} \times RT$$

$$\therefore ST = 6\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

- 3) दिलेल्या आकृतीमध्ये $\Delta PQR = 90^\circ$,
रेख $QN \perp$ रेख PR , $PN = 9$, $QN = 12$
तर NR ची किंमत शोधण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.



कृती : ΔPQR मध्ये,

$$\angle PQR = 90^\circ$$

रेख QN रेख PR

$$\therefore NQ^2 = \boxed{} \dots\dots\dots \text{भूमितीमध्याच्या प्रमेयानुसार}$$

$$\therefore 12^2 = \boxed{} \dots\dots\dots \text{उदाहरणात दिलेल्या किमतीनुसार}$$

$$\therefore NR = \frac{\boxed{}}{9}$$

$$\therefore NR = \boxed{}$$

प्र. 2 ब) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

- 1) एका काटकोन त्रिकोणात कर्णाची लांबी 15 सेमी असेल, तर कर्णावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी काढा.

उत्तर : काटकोन त्रिकोणामध्ये,

$$\text{कर्णावर काढलेली मध्यगा} = \frac{1}{2} \times \text{कर्ण}$$

$$\therefore \text{मध्यगा} = \frac{1}{2} \times 15$$

$$\therefore \text{मध्यगा} = 7.5 \text{ सेमी}$$

2) एका आयताची लांबी 16 सेमी आणि क्षेत्रफळ 192 चौसेमी आहे. अशा आयताचा कर्ण काढा.

उत्तर : आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी \times रुंदी

$$\text{रुंदी} = \frac{\text{आयताचे क्षेत्रफळ}}{\text{लांबी}}$$

$$\therefore \text{रुंदी} = \frac{192}{16}$$

$$\therefore \text{रुंदी} = 12 \text{ सेमी}$$

आता, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लांबी})^2 + (\text{रुंदी})^2$$

$$\therefore (\text{कर्ण})^2 = 16^2 + 12^2$$

$$\therefore (\text{कर्ण})^2 = 256 + 144$$

$$\therefore (\text{कर्ण})^2 = 400$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{400} = 20 \text{ सेमी}$$

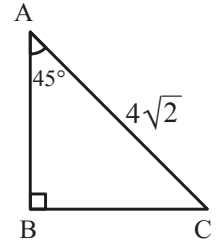
3) (24, 70, 70) हे पायथागोरसचे त्रिकूट आहे का? सकारण स्पष्ट करा.

उत्तर :

4) ΔABC मध्ये, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$ आणि

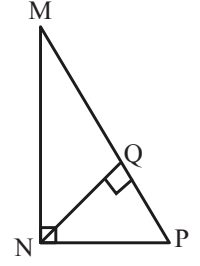
$AC = 4\sqrt{2}$ सेमी आहे, तर AB काढा.

उत्तर :



- 5) आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे, $\angle MNP = 90^\circ$,
रेख $NQ \perp$ रेख MP , $MQ = 9$, $QP = 4$, तर NQ काढा.

उत्तर :



- 6) ΔPQR मध्ये, $\angle P = 60^\circ$, $\angle Q = 90^\circ$, आणि $QR = 6\sqrt{3}$ सेमी असेल, तर PR आणि PQ काढा.

- 7) ΔABC मध्ये, रेख AP ही मध्यगा आहे. जर $BC = 18$, $AB^2 + AC^2 = 260$ असेल, तर AP काढा.

- 8) ΔABC मध्ये, $AB = 9$ सेमी, $BC = 40$ सेमी आणि $AC = 41$ सेमी आहे, तर ΔABC हा काटकोन त्रिकोण आहे किंवा नाही ते सकारण ठरवा.

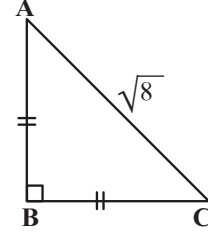
प्र. 3 अ) खालील कृती पूर्ण करा.

1) पुढील कृती पूर्ण करा.

$$AB = BC \dots\dots\dots \boxed{}$$

$$\therefore \angle BAC = \boxed{}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB = BC &= \boxed{} \times AC \\ &= \boxed{} \times \sqrt{8} \\ &= \boxed{} \times 2\sqrt{2} \\ &= \boxed{} \end{aligned}$$

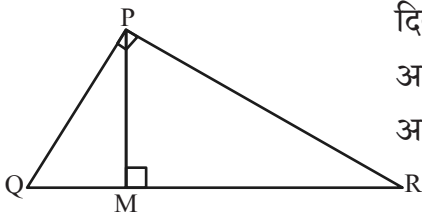


उत्तर : $AB = BC \dots\dots\dots$ पक्ष

$$\therefore \angle BAC = \boxed{\angle BAC \text{ किंवा } 45^\circ}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB = BC &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times AC \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \sqrt{8} \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 2\sqrt{2} \\ &= \boxed{2 \text{ एकक}} \end{aligned}$$

2)



दिलेल्या आकृतीमध्ये $\angle QPR = 90^\circ$ रेख $PM \perp$ रेख QR आणि $Q-M-R$, $PM = 10$, $QM = 8$ पुढील कृती पूर्ण करा आणि QR ची किंमत काढा.

कृती : ΔPQR मध्ये, $\angle QPR = 90^\circ$

आणि रेख $PM \perp$ रेख QR

$$\therefore PM^2 = \boxed{} \times MR \dots\dots\dots \boxed{}$$

$$\therefore (\boxed{})^2 = 8 \times MR$$

$$\therefore \frac{100}{8} = MR$$

$$\therefore \boxed{} = MR$$

आता, $QR = QM + MR$ (\because Q-M-R)

$$\therefore QR = 8 + \boxed{}$$

$$\therefore QR = \boxed{}$$

उत्तर : ΔPQR , $\angle QPR = 90^\circ$ आणि रेख $PM \perp$ रेख QR

$\therefore PM^2 = \boxed{QM} \times MR$ भूमितीमध्याच्या प्रमेयानुसार

$$\therefore (\boxed{10})^2 = 8 \times MR$$

$$\therefore \frac{100}{8} = MR$$

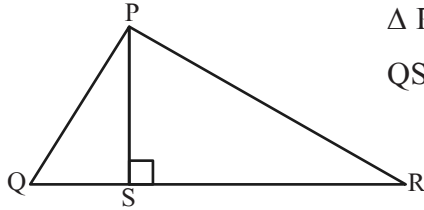
$$\therefore \boxed{12.5} = MR$$

आता, $QR = QM + MR$ (\because Q-M-R)

$$\therefore QR = 8 + \boxed{12.5}$$

$$\therefore QR = \boxed{20.5 \text{ एकक}}$$

3)



ΔPQR मध्ये, रेख \perp बाजू QR , तर $PQ^2 + RS^2 = PR^2 + QS^2$ हे सिद्ध करण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

कृती : ΔPSQ मध्ये, $\angle PSQ = 90^\circ$

$PS^2 + QS^2 = PQ^2$ पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$$PS^2 = PQ^2 - \boxed{} \text{ (I)}$$

त्याचप्रमाणे, ΔPSR मध्ये, $\angle PSR = 90^\circ$

$$\therefore PS^2 + \boxed{} = PR^2 \text{ पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार}$$

$$\therefore PS^2 = PR^2 - \boxed{} \text{ (II)}$$

$$\therefore PQ^2 - \boxed{} = \boxed{} - RS^2 \text{ विधान (I) आणि (II) वरून}$$

$$\therefore PQ^2 + \boxed{} = PR^2 + QS^2$$

प्र. 3 ब) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

- 1) काटकोन त्रिकोणात, कर्णावर काढलेला शिरोलंब, त्या शिरोलंबामुळे होणाऱ्या कर्णाच्या दोन भागांचा भूमितीमध्य असतो हे सिद्ध करा.

उत्तर : काटकोन त्रिकोण PQR मध्ये रेख QS \perp कर्ण PR

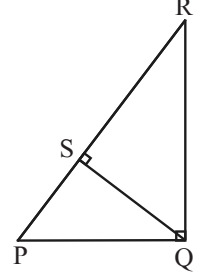
$\Delta QSR \sim \Delta PSQ$ (काटकोन त्रिकोणांची समरूपता)

$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$

\therefore शिरोलंब QS हा रेख PS आणि रेख SR यांचा 'भूमितीमध्य' आहे.



- 2) सिद्ध करा. काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.

पक्ष : ΔABC मध्ये, $\angle ABC = 90^\circ$

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदू B मधून बाजू AC वर रेख BD लंब काढला. A-D-C

सिद्धता : काटकोन ΔABC मध्ये रेख BD \perp कर्ण AC (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ (काटकोन त्रिकोणांची समरूपता)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB} \text{ - संगतभुजा}$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \quad \therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$$

$$AB^2 = AD \times AC \text{ (I)}$$

तसेच, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC} \text{ - संगतभुजा}$$

$$BC^2 = DC \times AC \text{ (II)}$$

(I) व (II) यांची बेरीज करून

$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$$

$$= AC (AD + DC)$$

$$= AC \times AC \text{ (A-D-C)}$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

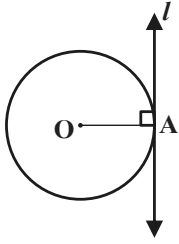
3. वर्तुळ

पूर्वज्ञान :

- वर्तुळ, वर्तुळासंबंधित घटक : वर्तुळ त्रिज्या, व्यास, जीवा, वर्तुळ स्पर्शिका, वृत्तछेदिका, केंद्रीय कोन इत्यादी संकल्पना.

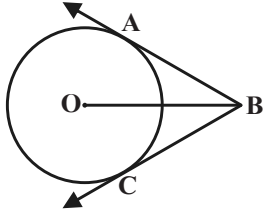
पाठातील संकल्पना :

1) स्पर्शिका - त्रिज्या प्रमेय



केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला रेषा l ही बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. त्रिज्या OA, तर रेषा $l \perp$ त्रिज्या OA.

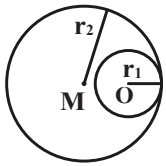
2) स्पर्शिकाखंडाचे प्रमेय : वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूपासून त्या वर्तुळाला काढलेले स्पर्शिकाखंड एकरूप असतात.



$$BA \cong BC$$

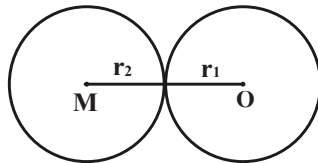
3) स्पर्शवर्तुळे

अंतस्पर्शी वर्तुळे



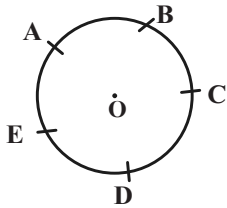
$$d(M, O) = r_2 - r_1$$

बाह्यस्पर्शी वर्तुळे



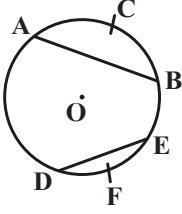
$$d(M, O) = r_1 + r_2$$

4) कंसांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म



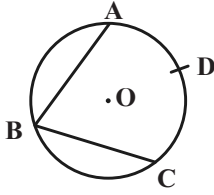
$$m(\text{कंस } ABC) + m(\text{कंस } CD) = m(\text{कंस } ABD)$$

5) एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळाच्या) एकरूप कंसांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.



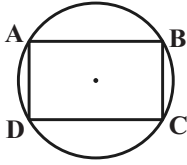
जर $m(\text{कंस } ACB) \cong m(\text{कंस } DFE)$, तर जीवा $AB \cong$ जीवा DE

6) अंतर्लिखित कोन



$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{कंस } ADC)$$

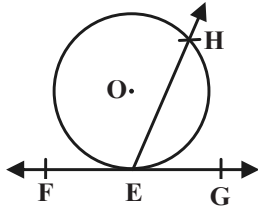
7) चक्रीय चौकोन



$$1) \angle A + \angle C = 180^\circ$$

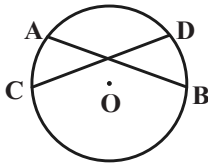
$$2) \angle B + \angle D = 180^\circ$$

8) स्पर्शिका छेदिका कोनाचे प्रमेय



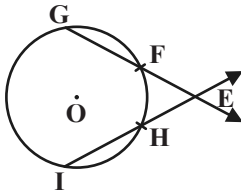
$$\angle HEG = \frac{1}{2} m(\text{कंस } HE)$$

9) जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय



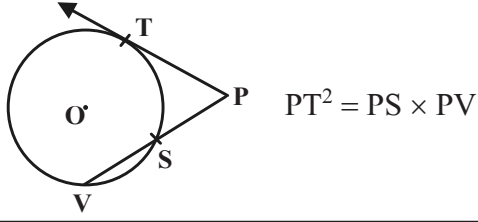
$$EA \times EB = ED \times EC$$

10) जीवांच्या बाह्यछेदनाचे प्रमेय



$$EF \times EG = EH \times EI$$

11) स्पर्शिका छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय



उदाहरणे :

प्र. 1 अ) दिलेल्या पर्यायांपैकी योग्य पर्याय निवडा.

1) बाह्यस्पर्शी दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 5.7 सेमी आणि 3.3 सेमी असतील, तर त्यांच्या केंद्रातील अंतर किती ?

(A) 2.4 सेमी (B) 1.2 सेमी (C) 9.0 सेमी (D) 4.5 सेमी

उत्तर : समजा, वर्तुळाच्या त्रिज्या $r_1 = 5.7$, $r_2 = 3.3$

$$\begin{aligned} \text{बाह्यस्पर्शी वर्तुळ} &\longrightarrow \text{वर्तुळकेंद्रातील अंतर} = r_1 + r_2 \\ &= 5.7 + 3.3 \\ &= 9.0 \\ &\text{योग्य पर्याय (C)} \end{aligned}$$

2) तीन नैकरेषीय बिंदूतून जाणारी किती वर्तुळे काढता येतील ?

(A) 0 (B) असंख्य (C) 2 (D) एक आणि एकच

उत्तर : पर्याय (D)

3) एकाच कंसात अंतर्लिखित झालेले सर्व कोन असतात.

(A) असमान (B) काटकोन (C) एकरूप (D) लघुकोन

उत्तर : पर्याय (C)

4) केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा कंस PQR मध्ये $\angle PQR$ अंतर्लिखित केला आहे. जर $m\angle PQR = 100^\circ$ तर $m(\text{कंस PQR}) =$ किती ?

(A) 100° (B) 80° (C) 50° (D) 260°

उत्तर : पर्याय (-----)

5) वर्तुळाच्या सर्वांत मोठ्या जीवेची लांबी 16 सेमी असल्यास त्याची त्रिज्या काढा.

(A) 8 सेमी (B) 16 सेमी (C) 32 सेमी (D) 8.5 सेमी

उत्तर : योग्य पर्याय (-----)

प्र. 1 ब) सोडवा.

1) □ ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे. जर $\angle D = 105^\circ$, तर $\angle B$ चे माप किती?

$$\angle D + \angle B = 180^\circ \quad (\text{चक्रीय चौकोनाचे प्रमेय})$$

$$\therefore 105^\circ + \angle B = 180^\circ$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 105^\circ$$

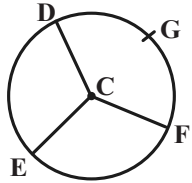
$$\boxed{\angle B = 75^\circ}$$

2) अर्ध वर्तुळकंसाचे माप किती असते?

$$\text{उत्तर : } 180^\circ$$

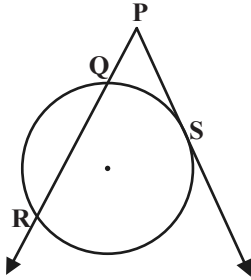
3) त्रिज्या 5.4 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या दोन स्पर्शिका परस्परांना समांतर आहेत. त्या स्पर्शिकांतील अंतर किती?

उत्तर :

4)  केंद्र C असलेल्या वर्तुळावर D, E, F बिंदू आहेत. कंस DGF चे माप 210° , तर कंस DEF चे माप किती?

प्र. 2 अ) खालील कृती पूर्ण करा.

1)



आकृतीत रेख PS हा स्पर्शिकाखंड आहे. रेषा PR ही वृत्तछेदिका जर $PQ = 3.6$, $PR = 10$ तर PS काढा.

$$PS^2 = PQ \times \boxed{}$$

$$= 3.6 \times \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

$$PS = \boxed{}$$

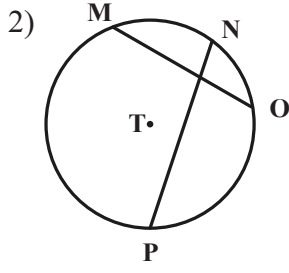
उत्तर : आकृतीत रेख PS हा स्पर्शिकाखंड आहे. रेषा PR ही वृत्तछेदिका जर $PQ = 3.6$, $PR = 10$ तर PS काढा.

$$PS^2 = PQ \times \boxed{PR}$$

$$= 3.6 \times \boxed{10} \quad \text{स्पर्शिका छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय}$$

$$= \boxed{36}$$

$$PS = \boxed{6}$$



जीवा MO, जीवा NP परस्पराना T बिंदूत छेदतात. जर $MT = 6$, $TO = 3$, $MT = 2.5$, तर TP काढा.

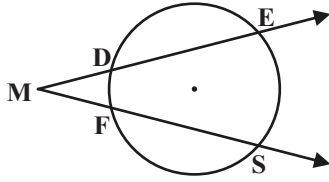
$$TM \times TO = \boxed{} \times TP$$

$$6 \times 3 = 2.5 \times \boxed{}$$

$$\boxed{} = 2.5 \times TP$$

$$\boxed{} = TP$$

3) $m(\text{कंस ES}) = 110^\circ$, $m(\text{कंस DF}) = 52^\circ$ तर, $\angle EMS$ चे माप किती?



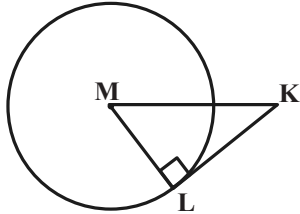
$$\angle EMS = \frac{1}{2} (m \text{ कंस } \boxed{} - m \text{ कंस } \boxed{})$$

$$= \frac{1}{2} (110^\circ - \boxed{})$$

$$\angle EMS = \boxed{}$$

प्र. 2 ब) सोडवा.

1) M केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा रेख KL हा स्पर्शिकाखंड आहे. जर $MK = 12$, $ML = 6$ तर $LK =$ किती?



उकल:

ΔMLK मध्ये $\angle L = 90^\circ$ स्पर्शिका-त्रिज्या लंबता प्रमेय

$$MK^2 = ML^2 + LK^2$$

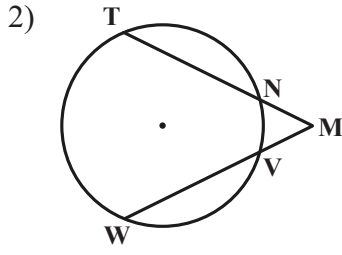
$$(12)^2 = (6)^2 + LK^2$$

$$\therefore 144 - 36 = LK^2$$

$$\therefore 108 = LK^2$$

$$\therefore \sqrt{12 \times 9} = LK$$

$$\therefore LK = 6\sqrt{3}$$



जीवा TN, जीवा VW परस्पराना M बिंदूत छेदतात. $MV = 6$, $VW = 10$, $MN = 8$, तर $MT =$ किती ?

प्र. 3 अ) खालील कृती पूर्ण करा.

1) M केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेषा BC ही स्पर्शिका आहे.

$$\angle ABE = \frac{1}{2} m(\text{कंस AFB})$$

$$\angle ABE + \angle ABC = \boxed{} \boxed{}$$

$$\frac{1}{2} m(\text{कंस AFB}) = 180 - \boxed{}$$

$$\angle ABC = 180 - \frac{1}{2} m(\text{कंस AFB})$$

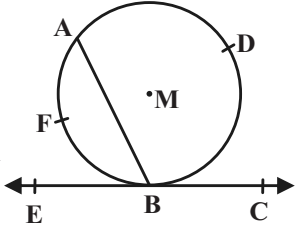
$$= 180 - \frac{1}{2} m(360 - \boxed{})$$

$$= 180 - \boxed{} + \frac{1}{2} \boxed{}$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{कंस } \boxed{})$$

उत्तर :

M केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेषा BC ही स्पर्शिका आहे.



$$\angle ABE = \frac{1}{2} m(\text{कंस AFB})$$

$$\angle ABE + \angle ABC = \boxed{180^\circ} \boxed{\text{रेषीय जोडीतील कोन}}$$

$$\frac{1}{2} m(\text{कंस AFB}) = 180 - \boxed{\angle ABC}$$

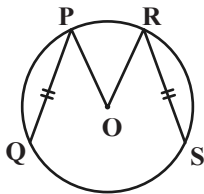
$$\angle ABC = 180 - \frac{1}{2} m(\text{कंस AFB})$$

$$= 180 - \frac{1}{2} m(360 - \boxed{\text{कंस ADB}})$$

$$= 180 - \boxed{180} + \frac{1}{2} \boxed{m(\text{कंस ADB})}$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} m(\text{कंस } \boxed{\text{ADB}})$$

2) आकृतीत जीवा $PQ \cong$ जीवा RS , $\angle POR = 100^\circ$, $m(\text{कंस PQ}) = 70^\circ$ तर,



$$m(\text{कंस PR}) = \boxed{} \text{ केंद्रीय कोन}$$

$$m(\text{कंस PR}) = \boxed{}$$

$$m(\text{कंस PQ}) = m(\text{कंस } \boxed{}) \text{ एकरूप जीवांनी केलेले कंस}$$

$$m(\text{कंस PQ}) + m(\text{कंस QS}) + m(\text{कंस } \boxed{}) + m(\text{कंस } \boxed{}) = 360^\circ$$

$$m(\text{कंस QS}) = \boxed{}$$

प्र. 3 ब) सोडवा.

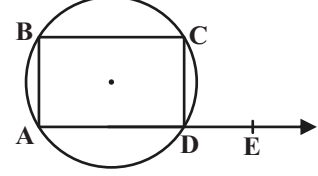
1) सिद्ध करा.

चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन त्याच्या संलग्न कोनाच्या संमुख कोनाशी एकरूप असतो.

पक्ष : $\square ABCD$ हा चक्रीय चौकोन आहे.

$\angle CDE$ हा $\square ABCD$ चा बाह्यकोन आहे.

साध्य : $\angle CDE \cong \angle CBA$



सिद्धता : 1) $\square ABCD$ या चक्रीय चौकोनात

$$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ \text{ (चक्रीय चौकोनाचे प्रमेय)}$$

$$2) \angle CDE + \angle CDA = 180^\circ \text{ (रेषीय जोडीतील कोन)}$$

$$3) \angle ABC + \angle CDA = \angle CDE + \angle CDA \text{ (1) व (2) वरून}$$

$$4) \therefore \angle ABC \cong \angle CDE$$

$$\therefore \angle CDE \cong \angle CBA$$

2) सिद्ध करा.

वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूपासून त्या वर्तुळाला काढलेले स्पर्शिकाखंड एकरूप असतात.

4. भौमितिक रचना

पूर्वज्ञान :

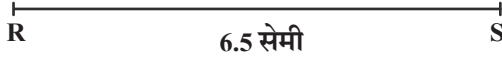
प्र. 1 अ) दिलेल्या मापाचा रेषाखंड काढणे.

1) 5 सेमी लांबीचा रेष PQ काढा.

मोजपट्टीच्या साहाय्याने रेष PQ काढताना, मोजपट्टीवरील 0 (शून्य) या संख्येपासून मोजण्यास सुरुवात करावी.



2) $l(RS) = 6.5$ सेमी आहे, तर रेष RS काढा.



अभ्यास :

i) 6 सेमी लांबीचा रेष AB काढा.

ii) $l(MN) = 4.5$ सेमी आहे, तर रेष MN काढा.

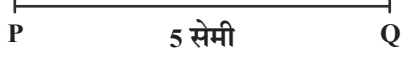
iii) रेष CD असा काढा की, $l(CD) = 7.2$ सेमी

प्र. 1 ब) रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे.

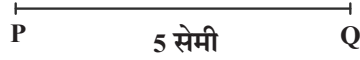
1) रेख PQ ची लांबी 5 सेमी आहे, तर रेख PQ चा लंबदुभाजक काढा.

कृती :

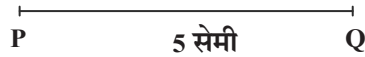
i) 5 सेमी लांबीचा रेख PQ मोजपट्टीच्या साहाय्याने काढा.



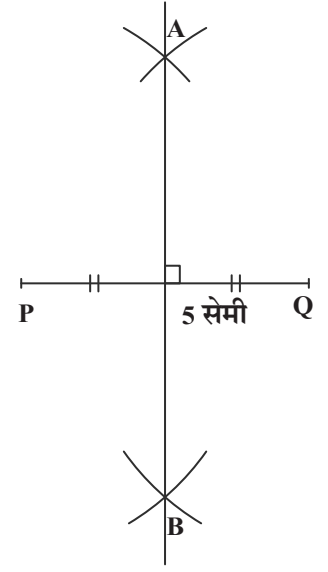
ii) लंबदुभाजक काढण्यासाठी, कंपासचे धातूचे टोक रेख PQ च्या बिंदू P वर ठेवा. हे टोक व पेन्सिल लावलेले टोक यांत अंदाजे रेषाखंडाच्या निम्न्या लांबीपेक्षा थोडे जास्त अंतर घ्या. बिंदू P वरील टोक न हलवता रेषाखंडाच्या वरील व खालील बाजूस पेन्सिलच्या साहाय्याने कंस काढा.



iii) कंपासच्या दोन्ही टोकांमधील अंतर कायम ठेवून, आधी काढलेल्या कंसांना छेदणारे कंस काढण्यासाठी वरील कृती कंपासचे धातूचे टोक बिंदू Q वर ठेवून करा. छेदनबिंदूना बिंदू A व B अशी नावे द्या.



- iv) रेषाखंडाच्या वरील व खालील बाजूस असणारे अनुक्रमे बिंदू A व B जोडणारी रेषा काढा. ही रेषा AB, रेष PQ ची लंबदुभाजक रेषा आहे.



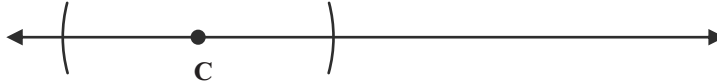
प्र. 1 क) रेषेवरील बिंदूतून रेषेला लंबरेषा काढणे.

एक रेषा काढा. रेषेवर कोणताही एक बिंदू C घ्या. बिंदू C मधून रेषेला लंबरेषा काढा.

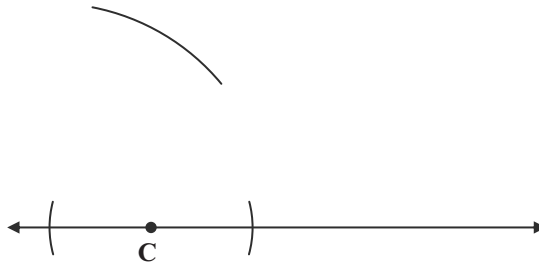
- i) एक रेषा काढा. त्यावर कुठेही बिंदू C घ्या.



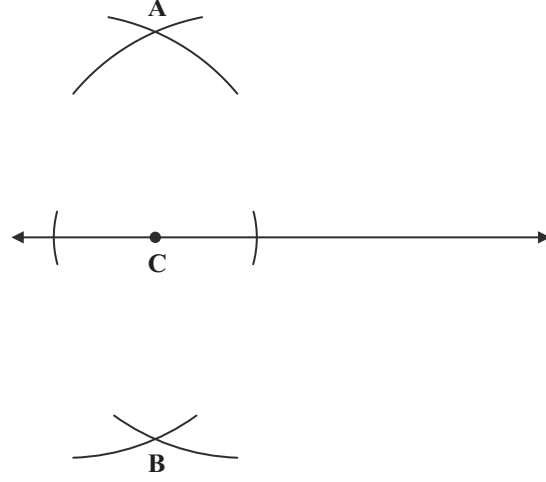
- ii) कंपासच्या दोन्ही टोकांमध्ये अंदाजे अंतर घेऊन, बिंदू C वर कंपासचे टोक ठेवून, बिंदू C च्या डावीकडे व उजवीकडे रेषेला छेदणारे कंस काढा.



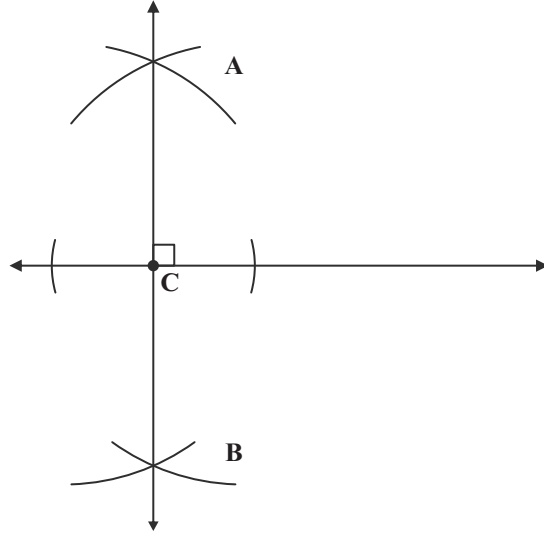
- iii) आता कंपासचे धातूचे टोक बिंदू C च्या डावीकडील रेषा व कंस यांच्या छेदनबिंदूवर ठेवा. कंपासच्या दोन्ही टोकांमधील अंतर किंचित वाढवा. रेषेच्या वरील व खालील बाजूस कंस काढा.



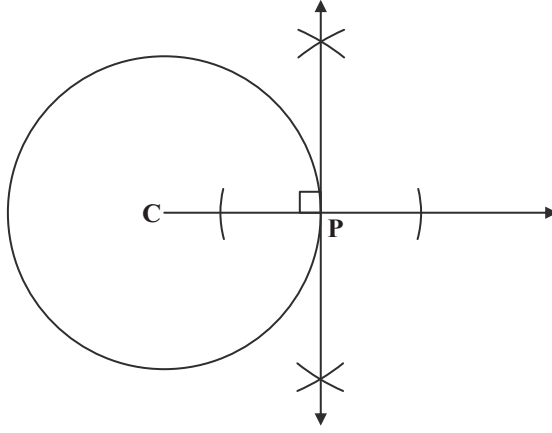
- iv) कंपासच्या दोन टोकांमधील अंतर तेच ठेवून, वरील कृती बिंदू C च्या उजवीकडील छेदनबिंदूवर ठेवून करा. आधी काढलेल्या कंसांना छेदणारे कंस व त्यांचे छेदनबिंदू मिळतील. त्यांना बिंदू A व B अशी नावे द्या.



- v) बिंदू A व B यांना जोडणारी रेषा काढा. ही रेषा AB, बिंदू C जवळ आडव्या रेषेला लंब असते.



प्र. 1 ड) दिलेल्या वर्तुळाला त्यावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.



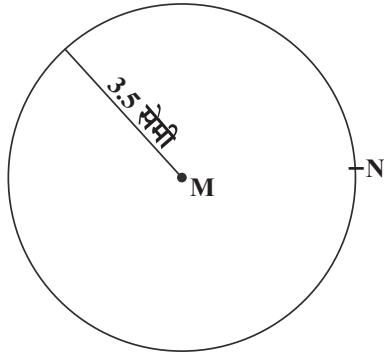
केंद्र C असलेल्या वर्तुळावरील बिंदू P मधून वर्तुळास स्पर्शिका काढणे.

महत्त्वाचे : रेषेवरील दिलेल्या बिंदूतून, रेषेला लंबरेषा काढणे ही रचना या आकृतीसाठी करायची आहे.

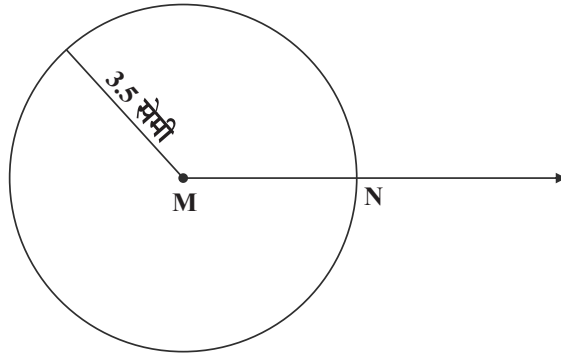
उदाहरण : केंद्र M व त्रिज्या 3.5 सेमी असलेल्या वर्तुळाला त्यावरील N बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

रचनेच्या पायऱ्या :

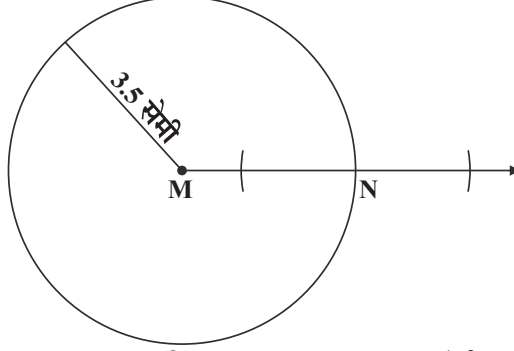
i) केंद्र M व त्रिज्या 3.5 सेमी असलेले एक वर्तुळ काढा. वर्तुळावर बिंदू N घ्या.



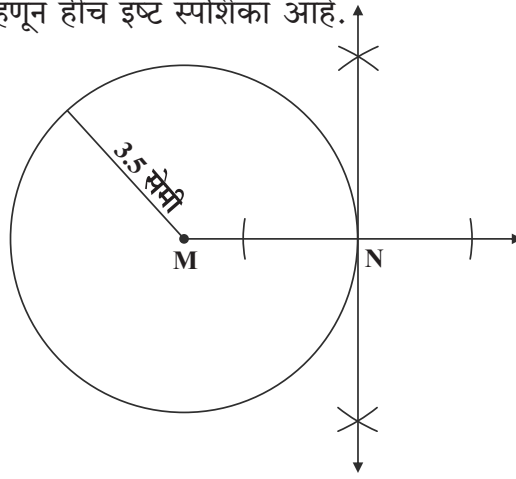
ii) किरण MN काढा.



- iii) बिंदू N वर कंपासचे धातूचे टोक ठेवून, बिंदू N च्या डावीकडे व उजवीकडे अशा प्रकारे कंसांची रचना केली.



- iv) किरण MN वरील बिंदू N मधून जाणारी लंबरेषा काढा. ही लंबरेषा वर्तुळास बिंदू N जवळ स्पर्श करते म्हणून हीच इष्ट स्पर्शिका आहे.



- v) बिंदू N च्या डावीकडील व उजवीकडील छेदनबिंदूंचा उपयोग करून, किरण MN च्या वरील व खालील बाजूस परस्परांना छेदणारे कंस काढले. कंसांच्या छेदनबिंदूंना जोडणारी रेषा बिंदू N मधून जाते. हीच रेषा, वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

सरावसंच

- 1) केंद्रबिंदू P व त्रिज्या 3.2 सेमी असलेल्या वर्तुळाला त्यावरील M बिंदूतून स्पर्शिका काढा.
- 2) केंद्र P व त्रिज्या 3.5 सेमी असलेल्या वर्तुळाला त्यावरील M बिंदूतून स्पर्शिका काढा. (ऑगस्ट 2022)
- 3) 3.3 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. त्यामध्ये 6.6 सेमी लांबीची जीवा PQ काढा. बिंदू P व Q मधून त्या वर्तुळाला स्पर्शिका काढा. (मार्च 2023)

(सूचना : 3.3 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. 6.6 सेमी लांबीची जीवा म्हणजेच वर्तुळाचा व्यास होय.)

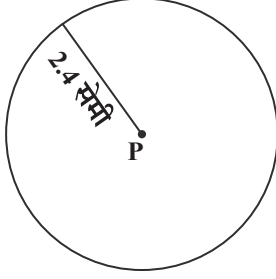
($2 \times$ त्रिज्या = व्यास) व्यास PQ च्या बिंदू P व Q मधून स्पर्शिकेची रचना करा.)

प्र. 1 ड) दिलेल्या वर्तुळात त्या बाहेरील दिलेल्या बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.

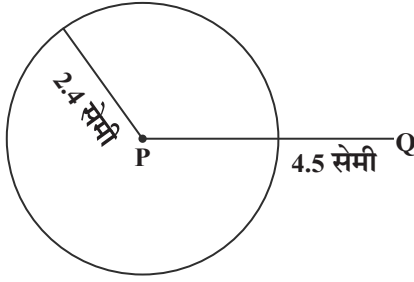
उदाहरण : P केंद्र व 2.4 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 4.5 सेमी अंतरावर बिंदू Q घ्या. बिंदू Q मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

रचनेच्या पायऱ्या :

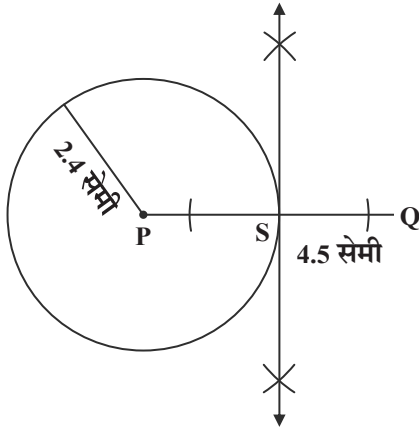
i) P केंद्र व 2.4 सेमी त्रिज्या असलेले एक वर्तुळ काढा.



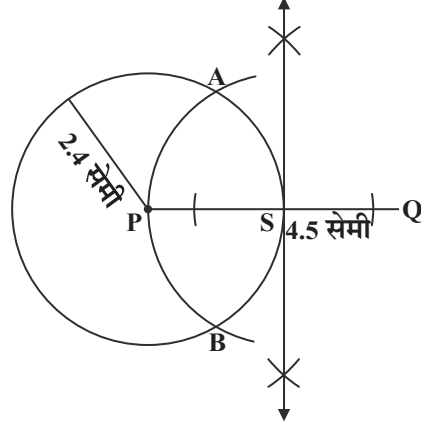
ii) बिंदू P पासून 4.5 सेमी अंतरावर बिंदू Q घ्या. रेख PQ काढा.



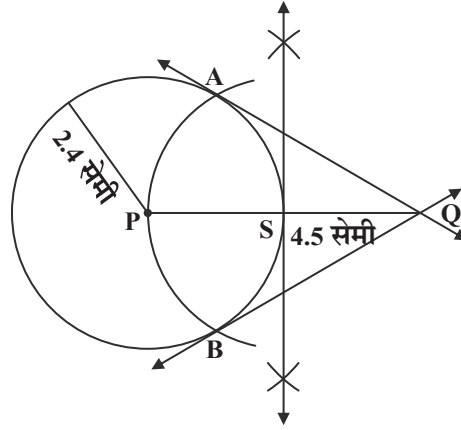
iii) रेख PQ चा लंबदुभाजक काढा. रेख PQ च्या मध्यबिंदूस S नाव द्या.



- iv) केंद्र S व त्रिज्या SP घेऊन वर्तुळकंस काढा. वर्तुळकंस व वर्तुळ यांच्या छेदनबिंदूंना अनुक्रमे बिंदू A व B अशी नावे द्या.



- v) रेषा QA व रेषा QB काढा. या दोन्ही रेषा वर्तुळाच्या अपेक्षित स्पर्शिका आहेत.



सरावसंच

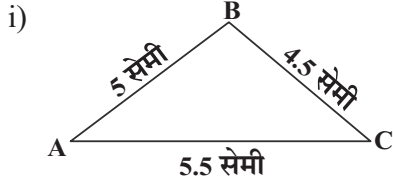
- 1) केंद्र O असलेले 3.5 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. वर्तुळकेंद्रापासून 7.5 सेमी अंतरावर बिंदू P घ्या. P बिंदूमधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा. (ऑगस्ट 2022)
- 2) P केंद्र व 3.4 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 5.5 सेमी अंतरावर बिंदू Q घ्या. Q बिंदूतून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.
- 3) 4.1 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 7.3 सेमी अंतरावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

त्रिकोण रचना

पूर्वज्ञान :

प्र. 1 अ) बा-बा-बा रचना : त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंची लांबी दिली असता त्रिकोण काढणे.

उदाहरण : $\triangle ABC$ असा काढा की, $l(AB) = 5$ सेमी, $l(BC) = 4.5$ सेमी, $l(AC) = 5.5$ सेमी
रचनेच्या पायऱ्या :

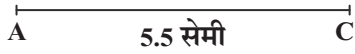


आधी कच्ची आकृती काढा.

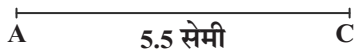
लक्षात घ्या, दिलेल्या माहितीवरून रेषा AC ही $\triangle ABC$ ची सर्वात मोठी बाजू आहे.

\therefore पाया AC घेतला.

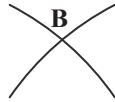
ii) रेषा AC काढण्यासाठी मोजपट्टीचा उपयोग करा.



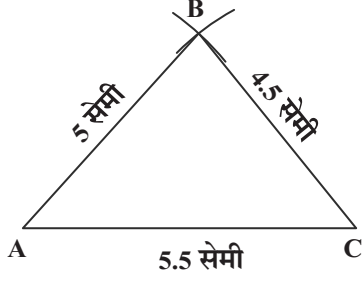
iii) कंपासमध्ये 5 सेमी अंतर घ्या. कारण $l(AB) = 5$ सेमी. कंपासचे टोक बिंदू A वर ठेवून रेषा AC च्या वरील बाजूस एक कंस काढा.



iv) $l(BC) = 4.5$ सेमी. बिंदू B चे स्थान निश्चित करण्यासाठी कंसामध्ये 4.5 सेमी अंतर घ्या. कंपासचे टोक बिंदू C वर ठेवून, आधी काढलेल्या कंसाला छेदणारा कंस काढा. या दोन्ही कंसांचा छेदनबिंदू हाच बिंदू B आहे.



v) बिंदू A व B जोडा तसेच बिंदू B व C जोडा. हाच इष्ट त्रिकोण ΔABC आहे.



सरावसंच

- 1) ΔPQR असा काढा की, $l(PQ) = 4$ सेमी, $l(QR) = 5$ सेमी, $l(PR) = 3$ सेमी.
- 2) ΔMNT असा काढा की, $l(MN) = l(MT) = 5$ सेमी, $l(NT) = 6$ सेमी, तर ΔMNT काढा.
- 3) ΔABC असा काढा की, $l(AC) = 6$ सेमी, $l(AB) = 5.4$ सेमी, $l(BC) = 4.2$ सेमी.

1 गुणांचे प्रश्न :

योग्य पर्याय निवडा.

- 1) वर्तुळावर दिलेल्या बिंदूतून वर्तुळाला काढता येणाऱ्या स्पर्शिकांची संख्या असते.
(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0
- 2) वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून वर्तुळाला जास्तीत जास्त स्पर्शिका काढता येतात.
(A) 2 (B) 1
(C) एक आणि एकच (D) 0
- 3) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$, तर
(A) ΔABC मोठा असेल.
(B) ΔPQR मोठा असेल.
(C) दोन्ही त्रिकोण समान असतील.
(D) निश्चित सांगता येणार नाही.

5. निर्देशक भूमिती

पूर्वज्ञान :

1) अंतराचे सूत्र :

- जर $A(x_1, y_1)$ व $B(x_2, y_2)$ हे कोणतेही दोन बिंदू असल्यास A आणि B बिंदू मधील अंतर पुढील सूत्राने काढतात.

- $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2) बिंदू विभाजन सूत्र :

- जर $A(x_1, y_1)$ व $B(x_2, y_2)$ हे कोणतेही दोन बिंदू असल्यास बिंदू $P(x, y)$ हा रेषा AB ला $m:n$ या गुणोत्तरात विभागत असल्यास P चे निर्देशक पुढील सूत्राने काढतात.

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \text{ आणि } y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

3) मध्य बिंदूचे सूत्र :

- जर $A(x_1, y_1)$ व $B(x_2, y_2)$ हे कोणतेही दोन बिंदू असल्यास बिंदू $P(x, y)$ हा रेषा AB ला समान गुणोत्तरात विभागत असल्यास म्हणजेच P हा AB चा मध्यबिंदू असल्यास P चे निर्देशक

- मध्यबिंदूचे सूत्र $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$ आणि $y = \frac{y_2 + y_1}{2}$

4) गुरुत्वमध्य सूत्र :

- जर $A(x_1, y_1)$ व $B(x_2, y_2)$ आणि $C(x_3, y_3)$ हे ΔABC चे शिरोबिंदू असून बिंदू $G(x, y)$ हा त्रिकोण ΔABC चा गुरुत्वमध्य आहे.

- गुरुत्व मध्याचे निर्देशक सूत्र $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ आणि $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

5) X अक्षाचा चढ 0 असतो.

6) Y अक्षाचा चढ काढता येत नाही.

7) जर $A(x_1, y_1)$ व $B(x_2, y_2)$ हे प्रतलातील दोन बिंदू असतील तर रेषा AB चा चढ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

8) एखाद्या रेषेने X अक्षाच्या धन दिशेशी केलेला कोन θ° असल्यास चढ $m = \tan \theta^\circ$

9) समांतर रेषांचे चढ समान असतात. $m_1 = m_2$

10) एकमेकींना लंब असणारी दोन रेषेचा चढाचा गुणाकार -1 असतो. $m_1 \times m_2 = -1$

11) जर A, B, C हे एकरेषीय बिंदू असतील तर AB चा चढ = BC चा चढ

प्र. 1 अ) -

- 1) रेख PQ समांतर Y अक्ष बिंदू P चे निर्देशक P (2, 5) असतील Q चे निर्देशक
(A) (3, 4) (B) (2, 3) (C) (5, 5) (D) (3, 6)

स्पष्टीकरण : रेख PQ समांतर Y अक्ष X निर्देशक बदलणार नाही म्हणून

उत्तर : (B) (2, 3)

- 2) बिंदू A (3, 4) आणि आरंभ बिंदू या मधील अंतर
(A) 25 (B) 7 (C) 13 (D) 5

स्पष्टीकरण : अंतराचे सूत्र $d(A, 0) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$

सरावसंच

- 1) रेख LM समांतर X अक्ष L चे निर्देशक tL (- 4, 5) तर बिंदू M चे निर्देशक

- 2) A (3, 4) आणि B (4, 5) या बिंदूमधील अंतर

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) 5

प्र. 1 ब) सराव.

(गुण १)

- 1) X अक्षाच्या धन दिशेशी 45° चा कोन करणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

उत्तर : एखाद्या रेषेने X अक्षाच्या धन दिशेशी केलेला कोन θ° असल्यास चढ $m = \tan \theta^\circ$

चढ $m = \tan 45^\circ = 1$

(A) 1:3 (B) 3:1 (C) 1:2 (D) 2:1

- 2) A (2, 3) आणि B (4, 7) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

उत्तर : A (2, 3) आणि B (4, 7) चढ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$

सरावसंच

- 1) X अक्षाच्या धन दिशेशी 30° चा कोन करणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

- 2) P (0, 3) व Q (4, 5) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

प्र. 2 अ) पुढील कृती करा.

(गुण २)

1) A (3, 7) व B (5, 3) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्य बिंदूचे निर्देशक काढा.

उत्तर : मध्य बिंदूचे निर्देशक (x, y) मानू

$$\text{मध्य बिंदूचे निर्देशक सूत्रानुसार } x = \frac{[3] + 5}{2} \text{ आणि } y = \frac{7 + [3]}{2}$$

$$x = \frac{8}{2} \text{ आणि } y = \frac{10}{2}$$

$$x = [4] \text{ } y = [5]$$

2) जर B (k, -5) व C (1, 2) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेचा चढ 7 असेल तर K ची किंमत काढा.

$$\text{उत्तर : रेषेचा चढ } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - [-5]}{1 - k} = 7$$

$$[1] = 1 - k$$

$$k = [1] - 1$$

$$k = [0]$$

सरावसंच

1) जर P (2, 4), Q (3, 6), R (3, 1) S (5, k) आणि PQ || RS तर K ची किंमत काढा.

PQ चा चढ = RS चा चढ

$$\frac{6 - 4}{3 - \square} = \frac{k - \square}{5 - 3}$$

$$6 = k - \square$$

$$k = -$$

2) ΔABC च्या शिरोबिंदूचे निर्देशक A (1, 4), B (3, 5), आणि C (2, 6) असल्यास गुरुत्वमध्याचे निर्देशक काढा.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ आणि } y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$x = \frac{\square}{3} \text{ आणि } y = \frac{\square}{3}$$

गुरुत्वमध्याचे निर्देशक $x = \square$ आणि $y = \square$

प्र. 2 ब) सोडवा.

(गुण २)

1) बिंदूमधील अंतर काढा. A (3, 7), आणि B (6, 3),

$$\text{स्पष्टीकरण : } d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(6-3)^2 + (3-7)^2} = d(A, B) = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

A (-1, 1), B (0, 1), व C (1, 3) हे बिंदू एकरेषीय आहेत का ते ठरवा.

$$AB \text{ चढ} = \frac{1 - (-1)}{0 - (-1)} = 2 \quad BC \text{ चढ} = \frac{3 - 1}{1 - 0} = 2$$

AB चढ = BC चा चढ

A (-1, 1), B (0, 1), व C (1, 3) हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

सरावसंच

1) P (2, 5), Q (3, 3), आणि R (5, 1) हे बिंदू एकरेषीय आहेत का ते ठरवा.

2) बिंदूमधील अंतर काढा. L (-3, -2), आणि M (5, -8)

प्र. 3 अ) कृती पूर्ण करा.

(गुण ३)

1) बिंदू A (3, 8) आणि बिंदू B (-9, 3) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला X अक्ष कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो तर काढा.

समजा, C हा बिंदू X अक्षावरील असून तो AB या रेषाखंडाला m : n या गुणोत्तरात विभागतो. असे मानू C हा Y अक्षावर आहे C (0, y)

$$x_1 = [3], y_1 = [8] \text{ आणि } x_2 = [-9], y_2 = [3]$$

$$\begin{aligned} \text{विभाजन सूत्राने } x &= \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \\ 0 &= \frac{[3]m + [-9]n}{m+n} \\ \frac{m}{n} &= \frac{9}{3} \text{ गुणोत्तर } 3:1 \end{aligned}$$

2) बिंदू A (4, -3), आणि बिंदू B (8, 5) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला 3:1 या गुणोत्तरात विभागणाऱ्या बिंदू चे निर्देशक काढू.

समजा P (x, y), हा रेषाखंड AB ला 3:1 या गुणोत्तरात विभागतो असे मानू.

$$\text{विभाजन सूत्राने } x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \text{ आणि } y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$x = \frac{[8] x_3 + [4] x_1}{3+1} \quad y = \frac{[5] \times 3 + [-3] \times x_1}{3+1}$$

$$x = [\quad] \text{ आणि } y = [\quad]$$

बिंदू P चे निर्देशक (.....,

प्र. 3 ब)

(गुण ३)

1) रेषा AB || CD A (-2, 1) B (0, 3) C (2, 1) आणि D (0, b) तर b ची किंमत काढा.

समांतर रेषांचे चढ समान असतात.

रेषा AB चा चढ आणि CD चा चढ समांतर आहेत.

$$A(x_1, y_1) = (-2, 1) \text{ आणि } B(x_2, y_2) = (0, 3)$$

$$\begin{aligned} \text{AB चा चढ} &= \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \\ &= \frac{3-1}{0-(-2)} = 1 \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$C(x_1, y_1) = (2, 1) \text{ आणि } D(x_2, y_2) = (0, b)$$

$$\begin{aligned} \text{CD चा चढ} &= \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \\ &= \frac{b-1}{0-2} \end{aligned}$$

रेषा AB चा चढ = रेषा CD चढ

$$1 = \frac{b-1}{0-2} \therefore -2 = b-1$$

$$b = -1$$

बिंदू A(6, 1) B(8, 2) C(9, 4) D(7, 3) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत हे सिद्ध करा.

$$\begin{aligned} \text{बाजू AB चा चढ} &= \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \\ &= \frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2} \dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{बाजू BC चा चढ} &= \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \\ &= \frac{4 - 2}{9 - 8} = 2 \dots (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{बाजू CD चा चढ} &= \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \\ &= \frac{3 - 4}{7 - 9} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \dots (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{बाजू AD चा चढ} &= \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \\ &= \frac{3 - 1}{7 - 6} = \frac{2}{1} = 2 \dots (4)\end{aligned}$$

बाजू AB चा चढ = बाजू BC चा चढ AB || CD (समीकरण (1) व (3) वरून)

बाजू BC चा चढ = बाजू AD चा चढ CB || AD (समीकरण (2) व (4) वरून)

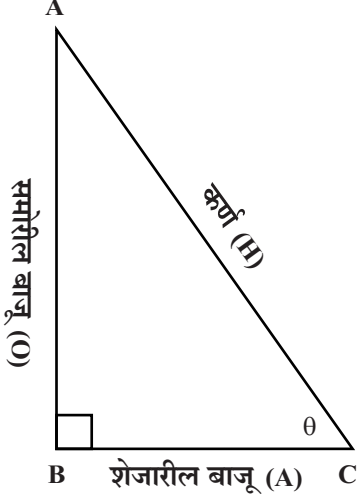
बिंदू A (6, 1) B (8, 2) C (9, 4) D (7, 3) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत.

सरावसंच

- 1) रेषा AB || CD A (2, 4) B (3, 6) C (8, 1) आणि D (0, a) तर a ची किंमत काढा.
- 2) बिंदू P (1, -2) Q (5, 2) R (3, -1) S (-1, -5) हे समांतरभूज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत हे स्पष्ट करा.

6. त्रिकोणमिती

1)



$$1) \sin \theta = \frac{O}{H} = \frac{AB}{AC}$$

$$2) \cos \theta = \frac{A}{H} = \frac{BC}{AC}$$

$$3) \tan \theta = \frac{O}{A} = \frac{AB}{BC}$$

$$4) \operatorname{cosec} \theta = \frac{H}{O} = \frac{AC}{AB}$$

$$5) \sec \theta = \frac{H}{A} = \frac{AC}{BC}$$

$$6) \cot \theta = \frac{A}{O} = \frac{BC}{AB}$$

2) त्रिकोणमितीय गुणोत्तरामधील संबंध :

$$1) \sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$$

$$2) \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$3) \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

$$4) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$5) \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$6) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$7) \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$8) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

लक्षात ठेवूया

चा व्यस्त

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \sin \theta \longleftrightarrow \operatorname{cosec} \theta \\ \cos \theta \longleftrightarrow \sec \theta \\ \tan \theta \longleftrightarrow \cot \theta \end{array}$$

लक्षात ठेवूया

(90 - θ)

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \sin \theta \longleftrightarrow \cos \theta \\ \operatorname{cosec} \theta \longleftrightarrow \sec \theta \\ \tan \theta \longleftrightarrow \cot \theta \end{array}$$

3) पूरक कोनाचे त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे :

$$1) \sin \theta = \cos (90 - \theta)$$

$$2) \tan \theta = \cot (90 - \theta)$$

$$3) \sec \theta = \operatorname{cosec} (90 - \theta)$$

$$4) \cos \theta = \sin (90 - \theta)$$

$$5) \cot \theta = \tan (90 - \theta)$$

$$6) \operatorname{cosec} \theta = \sec (90 - \theta)$$

4) त्रिकोणमितीय नित्यसमानता :

- 1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- 2) $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
- 3) $\cot^2 \theta + 1 = \text{cosec}^2 \theta$

5) $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ आणि 90° मापाच्या कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांची सारणी.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तर	कोनाचे माप (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ठरवता येत नाही.
$\text{cosec} \theta$ $= \frac{1}{\sin \theta}$	ठरवता येत नाही.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec \theta$ $= \frac{1}{\cos \theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ठरवता येत नाही.
$\cot \theta$ $= \frac{1}{\tan \theta}$	ठरवता येत नाही.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

प्र.1 अ) दिलेल्या बहुपर्यायी प्रश्नासाठी योग्य उत्तराचा पर्याय निवडा.

(प्रत्येकी 1 गुण)

- 1) $\sin \theta \operatorname{cosec} \theta = ?$
 A) 1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{2}$
- 2) $\sec 60^\circ = ?$
 A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{2}$
- 3) $1 + \tan^2 \theta = ?$
 A) $\tan^2 \theta$ B) $\sec^2 \theta$ C) $\text{cosec}^2 \theta$ D) $\cos^2 \theta$

- 4) $\sin^2 \theta + \sin^2 (90 - \theta) = ?$
 A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{2}$
- 5) $\tan \theta = \sqrt{3}$ तर $\theta = ?$
 A) 30° B) 45° C) 60° D) 90°
- 6) $\cot \theta (90 - \theta) = ?$
 A) $\sin \theta$ B) $\cos \theta$ C) $\cot \theta$ D) $\tan \theta$
- 7) $2 \tan 45^\circ - 2 \sin 30^\circ$ ची किंमत =
 A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{2}$
- 8) जर $\sin \theta = \frac{3}{5}$ तर $\cos \theta = ?$
 A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{5}{3}$

ब) खालील उदाहरणे सोडवा.

(प्रत्येकी 1 गुण)

1) $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = ?$

उत्तर : $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ}$ (दिलेले)

$$= \frac{1 - 1^2}{1 + 1^2}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

2) सिद्ध करा $\operatorname{cosec} \theta \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = 1$

उत्तर : $\operatorname{cosec} \theta \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ (दिलेले)

$$= \operatorname{cosec} \theta \cdot \sqrt{\sin^2 \theta} \text{ } (\because 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta)$$

$$= \operatorname{cosec} \theta \cdot \sin \theta$$

$$= 1$$

3) जर $\tan \theta = 1$, तर $\sin \theta \cdot \cos \theta = ?$

उत्तर : $\tan \theta = 1$ (दिलेले)

$$\therefore \tan \theta = \tan 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

$$\text{आता विचारात घेऊ, } \sin \theta \cdot \cos \theta = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

4) जर $2 \sin \theta = 3 \cos \theta$ तर $\tan \theta = ?$

5) जर $\cot (90 - A) = 1$ तर $\angle A = ?$

6) $\frac{\sin 75^\circ}{\cos 15^\circ} = ?$

प्र. 2 अ) खालील कृती पूर्ण करा.

(प्रत्येकी 2 गुण)

1) $\cos^2 \theta \cdot (1 + \tan^2 \theta) = 1$, या सिद्धतेसाठी दिलेली कृती पूर्ण करा.

$$\begin{aligned} \text{कृती : डावी बाजू} &= \boxed{} \\ &= \cos^2 \theta \times \boxed{} \dots (1 + \tan^2 \theta = \boxed{}) \\ &= (\cos^2 \theta \times \boxed{}) \\ &= 1^2 \\ &= 1 \\ &= \text{उजवी बाजू} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उत्तर : डावी बाजू} &= \boxed{\cos^2 \theta \cdot (1 + \tan^2 \theta)} \\ &= \cos^2 \theta \times \boxed{\sec^2 \theta} \dots (1 + \tan^2 \theta = \boxed{\sec^2 \theta}) \\ &= (\cos \theta \times \boxed{\sec \theta})^2 \\ &= 1^2 \\ &= 1 \\ &= \text{उजवी बाजू} \end{aligned}$$

2) $\frac{5}{\sin^2 \theta} - 5 \cot^2 \theta$, याची किंमत काढण्यासाठी दिलेली कृती पूर्ण करा.

$$\begin{aligned} \text{कृती : } \frac{5}{\sin^2 \theta} - 5 \cot^2 \theta & \\ &= \boxed{} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^2 \theta \right) \\ &= 5 \left(\boxed{} - \cot^2 \theta \right) \dots \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} = \boxed{} \right) \\ &= 5 (1) \\ &= \boxed{} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{उत्तर : } & \frac{5}{\sin^2 \theta} - 5 \cot^2 \theta \dots\dots (\text{दिलेले}) \\
& = \boxed{5} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^2 \theta \right) \\
& = 5 \left(\boxed{\operatorname{cosec}^2 \theta} - \cot^2 \theta \right) \dots\dots (\because \frac{1}{\sin^2 \theta} = \boxed{\operatorname{cosec}^2 \theta}) \\
& = 5 (1) \\
& = \boxed{5}
\end{aligned}$$

3) जर $\sec \theta + \tan \theta = \sqrt{3}$ तर $\sec \theta - \tan \theta$ तर खालील कृती पूर्ण करा.

$$\begin{aligned}
\text{कृती : } & \boxed{} = 1 + \tan^2 \theta \dots\dots (\text{नित्यसमानता}) \\
& \boxed{} - \tan^2 \theta = 1 \\
& (\sec \theta + \tan \theta) \cdot (\sec \theta - \tan \theta) = \boxed{} \\
& \sqrt{3} (\sec \theta - \tan \theta) = 1 \\
& (\sec \theta - \tan \theta) = \boxed{}
\end{aligned}$$

$$\text{उत्तर : } \boxed{\sec^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \dots\dots (\text{नित्यसमानता})$$

$$\begin{aligned}
\therefore \boxed{\sec^2 \theta} - \tan^2 \theta & = 1 \\
(\sec \theta + \tan \theta) \cdot (\sec \theta - \tan \theta) & = \boxed{1} \\
\sqrt{3} (\sec \theta - \tan \theta) & = 1 \dots\dots (\sec \theta + \tan \theta = \sqrt{3} \text{ दिलेले}) \\
(\sec \theta - \tan \theta) & = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

4) जर $\tan \theta = \frac{9}{10}$ तर $\sec \theta$, तर खालील कृती पूर्ण करा.

$$\begin{aligned}
\text{कृती : } \sec^2 \theta & = 1 + \boxed{} \dots\dots (\text{नित्यसमानता}) \\
\sec^2 \theta & = 1 + \boxed{}^2 \\
\sec^2 \theta & = 1 + \boxed{} \\
\sec \theta & = \boxed{}
\end{aligned}$$

ब) खालील उदाहरणे सोडवा.

(प्रत्येकी 2 गुण)

1) जर $\cos \theta = \frac{24}{24}$ तर $\sin \theta = ?$

उत्तर : $\cos \theta = \frac{24}{24}$ (दिलेले)

$$\therefore \cos \theta = 1$$

$$\therefore \cos \theta = \cos 0^\circ$$

$$\therefore \theta = 0^\circ$$

आता, $\sin \theta = \sin 0^\circ$

$$= 0$$

2) सिद्ध करा $\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta = \sec \theta$.

उत्तर : डावी बाजू

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \dots (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$= \sec \theta$$

$$= \text{उजवी बाजू}$$

3) जर $\cos \theta (45^\circ + x) = \sin 30^\circ$, तर $x = ?$

4) जर $\tan \theta + \cot \theta = 2$ तर, $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta = ?$

5) सिद्ध करा $\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = \sec^2 \theta \times \operatorname{cosec}^2 \theta$.

6) सिद्ध करा $\cot^2 \theta \times \sec^2 \theta = \cot^2 \theta + 1$.

7) जर $\sin 3A = \cos 6A$, तर $\angle A = ?$

8) सिद्ध करा $\frac{\tan A}{\cot A} = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$

प्र.3 अ) खालील कृती पूर्ण करा.

(प्रत्येकी 3 गुण)

1) $\sin^4 A - \cos^4 A = 1 - 2 \cos^2 A$, या सिद्धतेसाठी दिलेली कृती पूर्ण करा.

कृती : डावी बाजू =

= $(\sin^2 + \cos^2 A) (\text{ })$

= $1 (\text{ }) \dots\dots\dots (\sin^2 A + \text{ } = 1)$

= $\text{ } - \cos^2 A \dots\dots\dots (\sin^2 A = 1 - \cos^2 A)$

=

= उजवी बाजू

उत्तर : डावी बाजू = $(\sin^4 A - \cos^4 A)$

= $(\sin^2 + \cos^2 A) (\text{ })$

= $1 (\text{ }) \dots\dots (\because \sin^2 A + \text{ } = 1)$

= $\text{ } - \cos^2 A \dots\dots (\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A)$

=

= उजवी बाजू

2) $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \times \sin^2 \theta$ या सिद्धतेसाठी दिलेली कृती पूर्ण करा.

$$\begin{aligned} \text{कृती : डावी बाजू} &= \boxed{} \\ &= \boxed{} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \theta} \right) \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{\boxed{}}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \right) \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{1} \times \frac{\cos^2 \theta}{\boxed{}} \right) \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \boxed{} \right) \\ &= \tan^2 \theta \times \boxed{} \left(1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \right) \\ &= \text{उजवी बाजू} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उत्तर : डावी बाजू} &= \boxed{(\tan^2 \theta - \sin^2 \theta)} \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \theta} \right) \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \right) \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{1} \times \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \boxed{\cos^2 \theta} \right) \\ &= \tan^2 \theta \times \boxed{\sin^2 \theta} \dots \dots \left(1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \right) \\ &= \text{उजवी बाजू} \end{aligned}$$

3) जर $\tan \theta = \frac{7}{24}$, तर $\cos \theta$ ची किंमत काढण्यासाठी खालील तक्ता पूर्ण करा.

कृती : $\sec^2 \theta = 1 + \boxed{} \dots\dots$ (नित्यसमानता)

$$\sec^2 \theta = 1 + \boxed{}^2$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \frac{\boxed{}}{576}$$

$$\sec^2 \theta = \frac{\boxed{}}{576}$$

$$\sec \theta = \boxed{}$$

$$\cos \theta = \boxed{} \dots\dots \left(\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \right)$$

4) $\cot \theta + \tan \theta = \cos \theta \times \sec \theta$ या सिद्धतेसाठी दिलेली कृती पूर्ण करा.

कृती : डावी बाजू = $\boxed{}$

$$= \frac{\boxed{}}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\boxed{}}$$

$$= \frac{1 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \dots\dots \left(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \boxed{} \right)$$

$$= \frac{1}{\sec \theta} \times \frac{1}{\boxed{}}$$

$$= \boxed{}$$

= उजवी बाजू

ब) खालील उदाहरणे सोडवा.

(प्रत्येकी 3 गुण)

1) सिद्ध करा. $\frac{\tan(90 - \theta) + \cot(90 - \theta)}{\operatorname{cosec} \theta} = \sec \theta$

उत्तर : डावी बाजू विचारात घेऊ,

$$= \frac{\tan(90 - \theta) + \cot(90 - \theta)}{\operatorname{cosec} \theta} \dots\dots\dots \text{(दिलेले)}$$

$$= \frac{\cot \theta + \tan \theta}{\operatorname{cosec} \theta} \left[\because \tan \theta = \cot(90 - \theta), \cot \theta = \tan(90 - \theta) \right]$$

$$= \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\sin \theta}} \left(\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}}{\frac{1}{\sin \theta}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}}{\frac{1}{\sin \theta}} \left(\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \sec \theta \left(\because \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta \right)$$

= उजवी बाजू

2) सिद्ध करा. $\frac{\sec A}{\tan A + \cot A} = \sin A$

3) सिद्ध करा. $\frac{\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta}{\sin \theta} = 2 + \cot^2 \theta$

4) सिद्ध करा. $\sin^4 A - \cos^4 A = 1 - 2\cos^2 A$

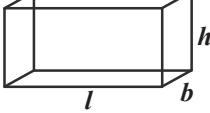
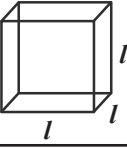
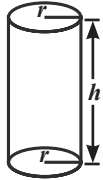
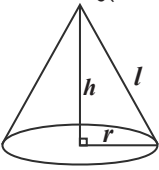
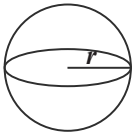

5) सिद्ध करा. $\sec^2 \theta - \cos^2 \theta = \tan^2 \theta + \sin^2 \theta$

6) ΔABC मध्ये, $\cos C = \frac{12}{13}$ आणि $BC = 24$ तर $AC = ?$

7) जर, $\sin A = \frac{3}{5}$ तर दाखवा की, $4 \tan A + 3 \cot A = 6 \cos A$

7. महत्त्वमापन

पूर्वज्ञान :

घनाकृती	पृष्ठफल			
	उभे पृष्ठ	वक्रपृष्ठफल	एकूण पृष्ठफल	घनफल
इष्टिकाचिती 	$2h(l + b)$	-	$2(lb + bh + hl)$	$(l \times b \times h)$
घन 	$4l^2$	-	$6l^2$	l^3
वृत्तचिती 	-	$2\pi rh$	$2\pi r(r + h)$	$\pi r^2 h$
शंकू 		πrl where, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$	$\pi r(l + r)$	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$
गोल 	-	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3} \pi r^3$
अर्धगोल 	-	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3} \pi r^3$

- वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$
- वर्तुळकंसाची लांबी = $l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$
- वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times l \times r$
- येथे, l = वर्तुळकंसाची लांबी

उदाहरणे :

प्र. 1 अ) पुढील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यापैकी अचूक पर्याय निवडून त्याचे वर्णाक्षर लिहा.

- 1) 3 सेमी बाजू असलेल्या घनाचे घनफळ किती?
(A) 27 घसेमी (B) 9 घसेमी (C) 81 घसेमी (D) 3 घसेमी
- 2) कंसाचे माप 90° आणि त्रिज्या 7 सेमी असलेल्या वर्तुळपाकळीची परिमिती काढा.
(A) 44 सेमी (B) 25 सेमी (C) 36 सेमी (D) 56 सेमी
- 3) तळाची त्रिज्या 7 सेमी व तिरकस उंची 25 सेमी असलेल्या शंकूचे वक्रपृष्ठफळ किती?
(A) 440 चौसेमी (B) 330 चौसेमी (C) 110 चौसेमी (D) 550 चौसेमी
- 4) 4 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाच्या सर्वांत मोठ्या जिवेची लांबी किती?
(A) 2 सेमी (B) 4 सेमी (C) 12 सेमी (D) 8 सेमी
- 5) समान त्रिज्या आणि समान उंची असलेल्या वृत्तचिती व शंकू यांच्या घनफळांचे गुणोत्तर किती असेल?
(A) 1:3 (B) 3:1 (C) 1:2 (D) 2:1
- 6) शंकूच्या तळाची त्रिज्या 5 सेमी आणि उंची 12 सेमी आहे, तर तिरकस उंची किती?
(A) 23 सेमी (B) 31 सेमी (C) 13 सेमी (D) 12 सेमी

प्र. 1 ब) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

- 1) एका वर्तुळकंसाचे माप 160° आणि वर्तुळकंसाची लांबी 44 सेमी आहे, तर वर्तुळाची परिमिती किती?

उत्तर : वर्तुळकंसाचे माप $= \theta = 160^\circ$

वर्तुळकंसाची लांबी $= l = 44$ सेमी

वर्तुळकंसाची लांबी $= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$44 = \frac{160}{360} \times \text{वर्तुळाची परिमिती}$$

$$44 = \frac{4}{9} \times \text{वर्तुळाची परिमिती}$$

$$\frac{44 \times 9}{4} = \text{वर्तुळाची परिमिती}$$

$$99 = \text{वर्तुळाची परिमिती} \therefore \text{वर्तुळाची परिमिती} = 99 \text{ सेमी}$$

2) एका लंबवृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 7 सेमी आणि उंची 2 सेमी आहे, तर तिचे घनफळ काढा.

3) एका घनाचे घनफळ 1000 घसेमी आहे, तर घनाची बाजू काढा.

प्र. 2 अ) खालील कृती पूर्ण करून पुन्हा लिहा.

1) एका गोलाची त्रिज्या 7 सेमी आहे, तर त्याचे एकूण पृष्ठफळ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$$\begin{aligned} \text{कृती : गोलाचे एकूण पृष्ठफळ} &= 4 \pi r^2 \\ &= 4 \times \frac{22}{7} \times \boxed{}^2 \\ &= 4 \times \frac{22}{7} \times \boxed{} \\ &= \boxed{} \times 7 \\ &= \boxed{} \text{ चौसेमी} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उत्तर : गोलाचे एकूण पृष्ठफळ} &= 4 \pi r^2 \\ &= 4 \times \frac{22}{7} \times \boxed{7}^2 \\ &= 4 \times \frac{22}{7} \times \boxed{49} \\ &= \boxed{88} \times 7 \\ &= \boxed{616} \text{ चौसेमी} \end{aligned}$$

2) 6 सेमी व्यास असणाऱ्या गोलाचे घनफळ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$$\text{कृती : गोलाची त्रिज्या} = r = \frac{6}{2} = \boxed{} \text{ सेमी}$$

$$\text{गोलाचे घनफळ} = \boxed{} \dots\dots\dots (\text{सूत्र})$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times \boxed{}$$

$$= \boxed{} \text{ घसेमी}$$

3) एका वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीची त्रिज्या 2.8 मी आणि उंची 3.5 मी आहे; तर त्या टाकीमध्ये किती लीटर पाणी मावेल हे काढण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

$$\text{कृती : पाण्याच्या टाकीची धारकता} = \text{वृत्तचिती आकाराच्या टाकीचे घनफळ}$$

$$= \boxed{} \dots\dots\dots (\text{सूत्र})$$

$$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$$

$$= \boxed{} \text{ घनमी}$$

$$= \boxed{} \times 1000 \text{ लीटर}$$

$$= \boxed{} \text{ लीटर}$$

प्र. 2 ब) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

1) वर्तुळपाकळीची त्रिज्या 5 सेमी असून तिच्या वर्तुळकंसाची लांबी 10 सेमी आहे, तर वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा.

$$\text{कृती : } l = 10 \text{ सेमी}$$

$$r = 5 \text{ सेमी}$$

$$\text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ} = \frac{1}{2} \times l \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5$$

$$= 25 \text{ चौसेमी}$$

$$\text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ} = 25 \text{ चौसेमी}$$

2) शंकूच्या तळाची त्रिज्या 7 सेमी आहे, तर त्याचे घनफळ किती? ($\pi \frac{22}{7}$)

3) एका इष्टिकाचितीच्या मिती सेंटीमीटरमध्ये $30 \times 18 \times 10$ आहेत, तर तिचे घनफळ काढा.

4) एका लंब वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 3 सेमी आणि उंची 7 सेमी आहे, तर ती त्याचे वक्रपृष्ठफळ काढा. ($\pi \frac{22}{7}$)

प्र. 3 अ) खालील कृती पूर्ण करून पुन्हा लिहा.

- 1) एका अर्धगोलाचे घनफळ 2094 घसेमी आहे, तर त्याची त्रिज्या काढण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

कृती : अर्धगोलाचे घनफळ = (सूत्र)

$$\text{[]} = \frac{2}{3} \times \text{[]} \times r^3$$

$$r^3 = \frac{\text{[]} \times 3}{2 \times \text{[]}}$$

$$r^3 = 1000$$

$$r = \text{[]} \text{ सेमी}$$

कृती : अर्धगोलाचे घनफळ = $\frac{2}{3} \times \pi r^3$ (सूत्र)

$$\text{[2094]} = \frac{2}{3} \times \text{[3.14]} \times r^3$$

$$r^3 = \frac{\text{[2094]} \times 3}{2 \times \text{[3.14]}}$$

$$r^3 = 1000$$

$$r = \text{[10]} \text{ सेमी}$$

- 2) लांबी 16 सेमी, रुंदी 11 सेमी व उंची 10 सेमी असलेल्या धातूच्या इष्टिकाचितीपासून ज्याची जाडी 2 मिमी आहे व व्यास 2 सेमी आहे अशी काही नाणी तयार केली, तर किती नाणी तयार होतील हे काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

येथे इष्टिकाचितीसाठी : $l=16$ सेमी, $b=11$ सेमी, $h=10$ सेमी

नाण्यासाठी : नाण्याची जाडी म्हणजेच उंची (h_1) होय.

$$h_1 = 2 \text{ मिमी} = \text{[]} \text{ सेमी}$$

$$\text{व्यास} = d = 2 \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिज्या} = r = \text{[]} \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned}
\text{नाण्यांची संख्या} &= \frac{\text{इष्टिकाचितीचे घनफळ}}{1 \text{ नाण्याचे घनफळ}} \\
&= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \dots\dots (\text{सूत्र}) \\
&= \frac{16 \times 11 \times 10}{\frac{22}{7} \times 1 \times 1 \times \boxed{}} \\
&= \frac{16 \times 11 \times 10 \times 7 \times 10}{22 \times 2} \\
\text{नाण्यांची संख्या} &= \boxed{}
\end{aligned}$$

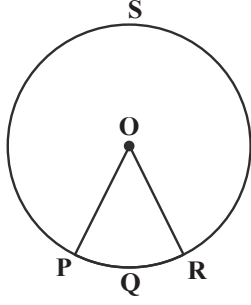
प्र. 3 ब) पुढील उपप्रश्न सोडवा.

- 1) 2.1 सेमी त्रिज्या असलेल्या गोलाचे घनफळ आणि एकूण पृष्ठफळ काढा. $(\pi \frac{22}{7})$

2) एका घनाचे घनफळ 1000 घसेमी आहे, तर त्याचे एकूण पृष्ठफळ काढा.

3) आकृतीत वर्तुळाची त्रिज्या 7 सेमी आणि $m(\text{arc PQR}) = 60^\circ$ तर,

i) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा. ii) $A(\text{O-PQR})$ काढा. iii) $A(\text{O-PSR})$ काढा.



इयत्ता दहावी : पुरवणी परीक्षा तयारी - विषय गणित

(भाग - 1 व 2)

श्रेयनामावली

अ. क्र.	तज्ज्ञ सदस्यांचे नाव	पदनाम	शाळा/कार्यालयाचे नाव
१)	जितेंद्र त्रिवेदी	सहशिक्षक	विद्या विकास मंदिर अवसरी (बुद्रुक), ता. आंबेगाव, जि. पुणे
२)	डॉ. भावना जोशी	निवृत्त मुख्याध्यापिका	पुणे
३)	विनोद बालसुब्रह्मण्यम	साहाय्यक शिक्षक	दी साऊथ इंडियन असोसिएशन हायस्कूल आणि ज्युनि. कॉलेज, डोंबिवली.
४)	अजित तिजोरे	साहाय्यक शिक्षक	श्री नारायणराव आचार्य विद्यानिकेतन, म्हैसूर कॉलनी मोनोरेल स्टेशनजवळ, माहुल रोड, चेंबूर, मुंबई.
५)	अतुल पटवा	साहाय्यक शिक्षक	भाऊसाहेब फिरोदिया हायस्कूल, जि. अहमदनगर
६)	सुवर्णा देशपांडे	साहाय्यक शिक्षक	न्यू इंग्लिश स्कूल, जि. सातारा.
७)	रामा व्हन्याळकर	मुख्याध्यापक	प्रा. नामदेवराव दुंडगेकर हायस्कूल मलतवाडी, ता. चंदगड, जि. कोल्हापूर
८)	स्वाती देसाई	साहाय्यक शिक्षक	कर्मवीर भाऊराव पाटील विद्यालय व ज्युनिअर कॉलेज भुईज, ता. वाई, जि. सातारा.
९)	आण्णापा परीट	साहाय्यक शिक्षक	न्यू इंग्लिश स्कूल अँड ज्युनिअर कॉलेज लाट, ता. शिरोळ, जि. कोल्हापूर.
१०)	वर्षा महाजन	साहाय्यक शिक्षक	आय. इ. एस. मॉडर्न इंग्लिश स्कूल, दादर, पश्चिम, मुंबई.
११)	प्रमोद बेंद्रे	साहाय्यक शिक्षक	रंगराव देशमुख माध्यमिक विद्यालय, अंबवडे (बुद्रुक), ता., जि. सातारा.
१२)	संजीव भोर	साहाय्यक शिक्षक	श्री रेणुका माध्यमिक विद्यालय रासे, ता. खेड, जि. पुणे.
१३)	सचिन बटवाल	पर्यवेक्षक	गुरुनानक हायस्कूल व ज्युनिअर कॉलेज, पुणे.
१४)	श्रीम. तरुबेन पोपट	निवृत्त मुख्याध्यापिका	संघवी के. एम. हायस्कूल, पुणे.
१५)	मनीषा पाठक	निवृत्त माध्यमिक शिक्षक	-

