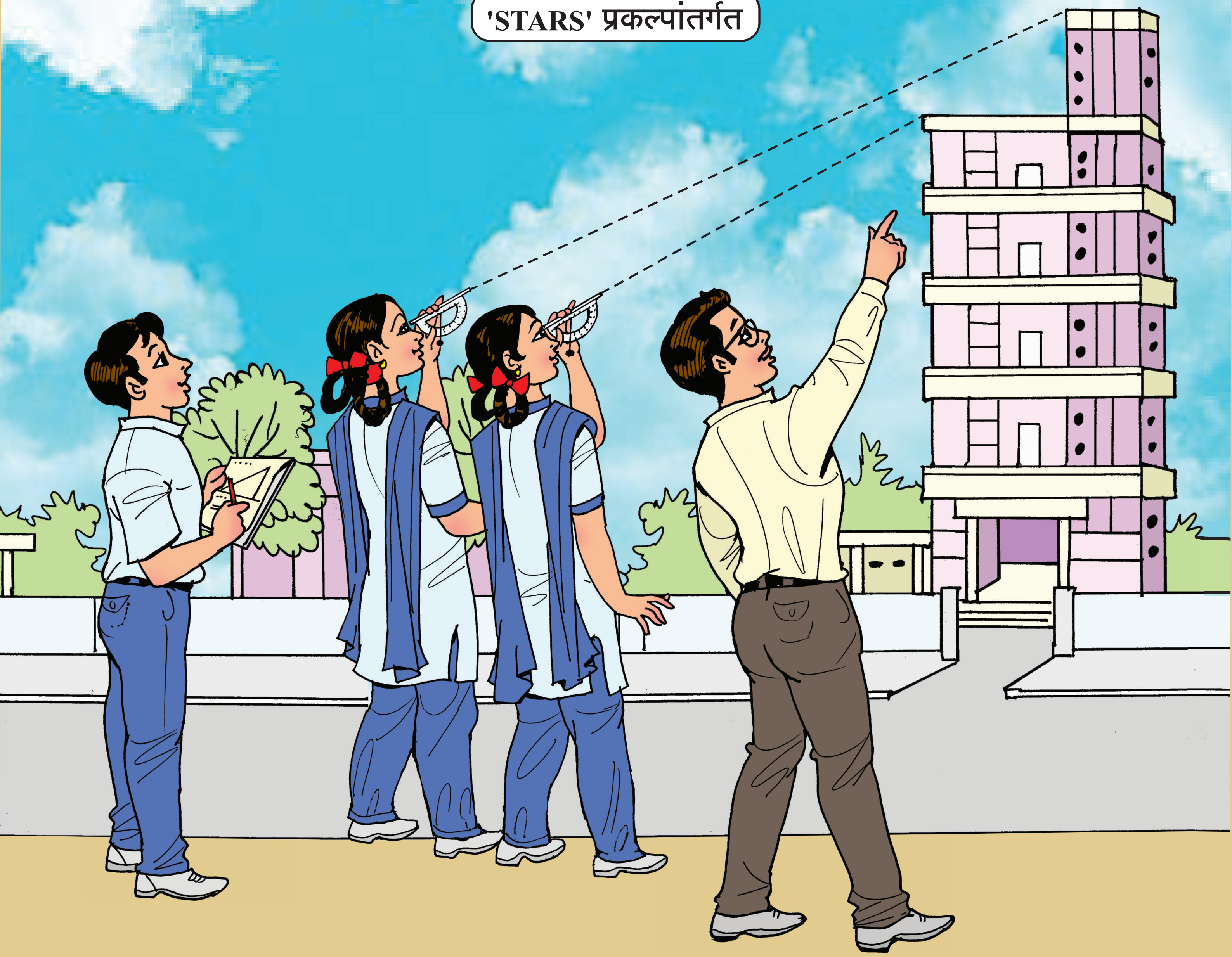
करूया मैत्री गणिताशी

कार्यपुस्तिका

इयत्ता : दहावी

'STARS' प्रकल्पांतर्गत



राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.

करूया मैत्री गणिताशी : कार्यपुस्तिका : इयत्ता दहावी

- **प्रवर्तक** : शालेय शिक्षण व क्रीडा विभाग, महाराष्ट्र शासन
- **प्रकाशक** : राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **प्रेरणा** : **मा. रणजितसिंह देओल (भा.प्र.से.)**
  प्रधान सचिव, शालेय शिक्षण व क्रीडा विभाग, महाराष्ट्र राज्य.
- **मार्गदर्शन** : **मा. सूरज मांढरे (भा.प्र.से.)**
  आयुक्त (शिक्षण), महाराष्ट्र राज्य, पुणे.
  : **मा. कैलास पगारे (भा.प्र.से.)**
  राज्य प्रकल्प संचालक,
  महाराष्ट्र प्राथमिक शिक्षण परिषद, मुंबई.
- **संपादक** : **मा. कौस्तुभ दिवेगावकर (भा.प्र.से.)**
  संचालक,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **सहसंपादक** : **मा. रमाकांत काठमोरे**
  सहसंचालक,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **कार्यकारी संपादक** : **डॉ. कमलादेवी आवटे**
  उपसंचालक, भाषा व समन्वय विभाग,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **कार्यकारी सहसंपादक** : **रत्नप्रभा भालेराव**
  वरिष्ठ अधिव्याख्याता, गणित विभाग,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
  : **वृषाली गायकवाड**
  अधिव्याख्याता, गणित विभाग,
  राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.
- **प्रथम आवृत्ती** : जानेवारी २०२३
- **अर्थसाहाय्य** : ‘STARS’ प्रकल्पांतर्गत, महाराष्ट्र प्राथमिक शिक्षण परिषद, मुंबई.
- **मुद्रक** : रुना ग्राफिक्स, पुणे.

- © सर्व हक्क प्रकाशकाच्या स्वाधीन.

करूया मैत्री गणिताशी

कार्यपुस्तिका

इयत्ता : दहावी

'STARS' प्रकल्पांतर्गत

नाव :

शाळा :

इयत्ता : तुकडी :

राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद, महाराष्ट्र, पुणे.

अनुक्रमणिका

अ.क्र.	घटक	पृष्ठ क्र.
	भाग – 1	
1.	दोन चलांतील रेषीय समीकरणे	1
2.	वर्गसमीकरणे	11
3.	अंकगणिती श्रेढी	19
4.	अर्थनियोजन	25
5.	संभाव्यता	29
6.	सांख्यिकी	34
	भाग – 2	
1.	समरूपता	44
2.	पायथागोरसचे प्रमेय	52
3.	वर्तुळ	57
4.	भौमितिक रचना	63
5.	निर्देशक भूमिती	67
6.	त्रिकोणमिती	72
7.	महत्त्वमापन	81

भाग – 1

1. दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

1) एका पेनची किंमत ₹ x व एका वहीची किंमत ₹ y आहे, तर खालील माहितीवरून समीकरणे तयार करा.

अ.क्र.	माहिती	समीकरण
1)	3 पेन व 2 वह्या यांची किंमत ₹ 56 आहे.	
2)	4 पेनांची किंमत 2 वह्यांच्या किंमतीपेक्षा ₹ 8 ने जास्त आहे.	
3)	6 पेनांची किंमत व 3 वह्यांची किंमत समान आहे.	

2) जर $x + y = 10$ असेल, तर खालील सारणी पूर्ण करा.

x	3	13	□	– 3	0	□
y	7	□	4.7	□	□	$\frac{12}{5}$

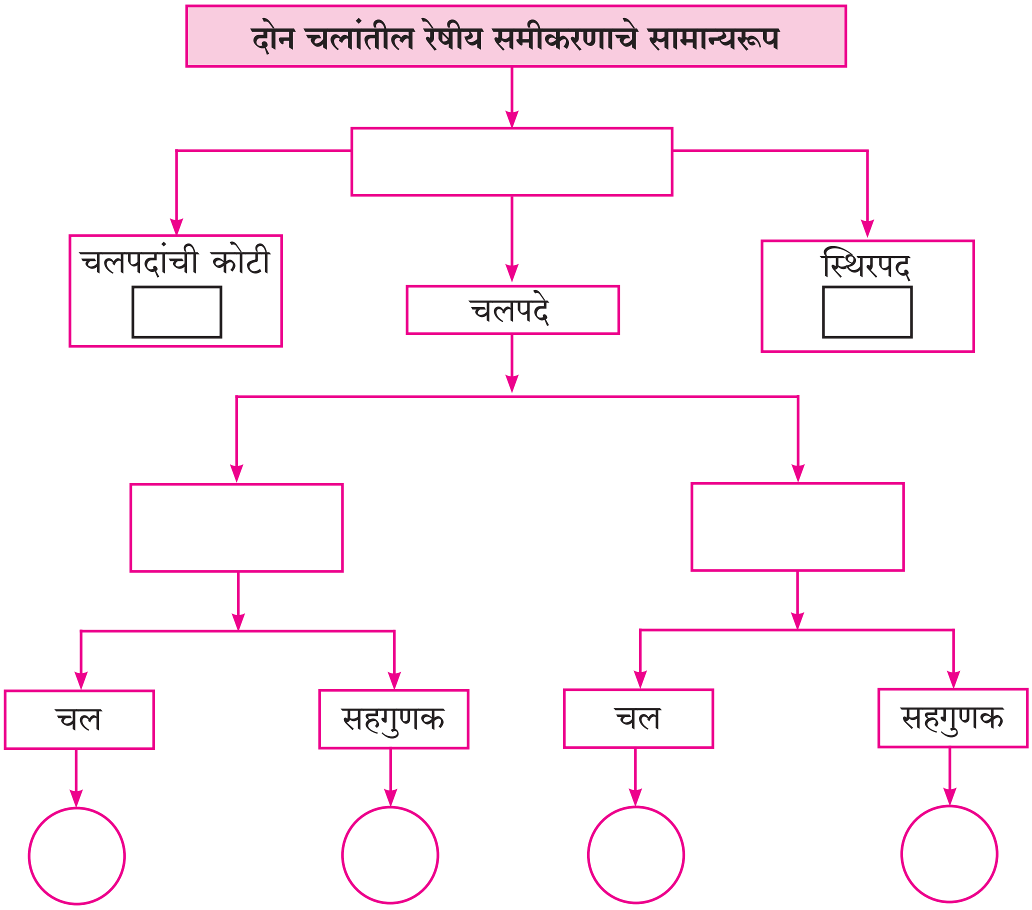
3) निश्चयकाची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$$\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-7) \times \square - \square \times 0$$

$$= \square - \square$$

$$= \square$$

4) **जर दिलेले समीकरण $3y = 10 + 3x$ असेल, तर खालील प्रवाह तक्ता पूर्ण करा.**



5) **जर $7x + 13y = 27$ आणि $13x + 7y = 33$ ही एकसामयिक समीकरणे असतील तर $x + y$ व $x - y$ ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

$7x + 13y = 27$ .... (I) ; $13x + 7y = 33$ .... (II)

समी. (I) व (II) ची बेरीज करू.

$$\begin{array}{rrcl} 7x & +13y & = & 27 \\ 13x & +7y & = & 33 \\ \hline 20x & +20y & = & \square \end{array}$$

प्रत्येक पदास 20 ने भागून.

$\therefore\ x + y = \square$

समी. (II) मधून समी. (I) वजा करून.

$$\begin{array}{rrcl} 13x & +\ 7y & = & 33 \\ _7x & +\ _13y & = & _27 \\ \hline 6x & -\ 6y & = & \square \end{array}$$

प्रत्येक पदास 6 ने भागून.

$\therefore\ x - y = \square$

6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3}$ **या समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी खालील सारणी पूर्ण करा.**

x	☐	-2	☐	☐
y	5	☐	2	☐
(x, y)	(☐ , ☐)	(☐ , ☐)	(☐ , ☐)	(☐ , 8)

7) **दोन चलांतील रेषीय समीकरणे आहेत की नाहीत, असे वर्गीकरण करून कृती पूर्ण करा.**

$4m + 3n = 17$; $3x^2 - 7y = 18$; $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 9$

$\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 17$; $3x + 10y = 4$; $4xy - 5y + 8 = 17$;

दोन चलांतील रेषीय समीकरण आहे.

दोन चलांतील रेषीय समीकरण नाही.

दोन चलांतील रेषीय समीकरण असलेले अन्य एक उदाहरण.

दोन चलांतील रेषीय समीकरण नसलेले अन्य एक उदाहरण.

8) **खाली दिलेले समीकरणाचे दोन चलांतील रेषीय समीकरणात रूपांतर करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

$\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 8$ → $\frac{1}{x} = m$ मानू, $\frac{1}{y} = n$ मानू → $5m - 3n = 8$

$\frac{3}{x-2} + \frac{4}{y-3} = 0$ → $\frac{1}{x-2} = \square$ मानू, $\frac{1}{y-3} = \square$ मानू → $\square$

$\frac{7}{x+y} - \frac{5}{x-y} = 0$ → $\square = \square$ मानू, $\square = \square$ मानू → $\square$

9) **एकसामायिक समीकरणे सोडविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

$3a + 5b = 26$........ (I)

$a + 5b = 22$ .... (II)

दोन्ही समीकरणातील $\square$ या चलाचे सहगुणक व चिन्ह समान आहेत.

म्हणूण समीकरण (I) मधून समीकरण (II) वजा करून

$$\begin{array}{r} 3a + 5b = 26 \\ -a \underset{-}{+} 5b = \underset{-}{}22 \\ \hline \therefore 2a = \square \end{array}$$

$\therefore a = \square$ ही किंमत समी. (I) किंवा (II) मध्ये ठेवून

$\therefore$ समीकरणांची उकल $(\square, \square)$ आहे.

$a + 5b = 22$ मध्ये

$a = \square$ ठेवू

$\therefore \square + 5b = 22$

$\therefore 5b = 22 - \square$

$\therefore 5b = \square$

$\therefore b = \square$

10) $x + 7y = 10$; $3x - 2y = 7$ ही समीकरणे सोडविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$x + 7y = 10$ .... (I) ; $3x - 2y = 7$ .... (II)

समीकरण (I) वरून $x = 10 - \square$ ही x ची किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवून

$\therefore 3\,\square - 2y = 7$ .... (II)

$\therefore 30 - \square\, y - 2y = 7$

$\therefore \square\, y = 7 - \square$

$\therefore y = \square$

$\therefore x = 10 - \square$ $\qquad \therefore x = \square$

$\therefore$ समीकरणाची उकल $(\square, \square)$ आहे.

11) क्रेमरच्या पद्धतीने एकसामायिक समीकरणे सोडविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$5x - 6y = -30$; $5x + 4y = 20$

$$D = \begin{vmatrix} \square & -6 \\ 5 & \square \end{vmatrix}$$

$\therefore D = (\square \times 4) - (-6 \times \square)$ $\therefore D = \square$

$$D_x = \begin{vmatrix} \square & -6 \\ \square & 4 \end{vmatrix}$$

$\therefore D_x = (\square \times 4) - (-6 \times \square)$ $\therefore D_x = \square$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & \square \\ \square & 20 \end{vmatrix}$$ $\therefore D_y = \square$

$\therefore D_y = 100 - \square$

$\therefore x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$ .... क्रेमरच्या नियमानुसार

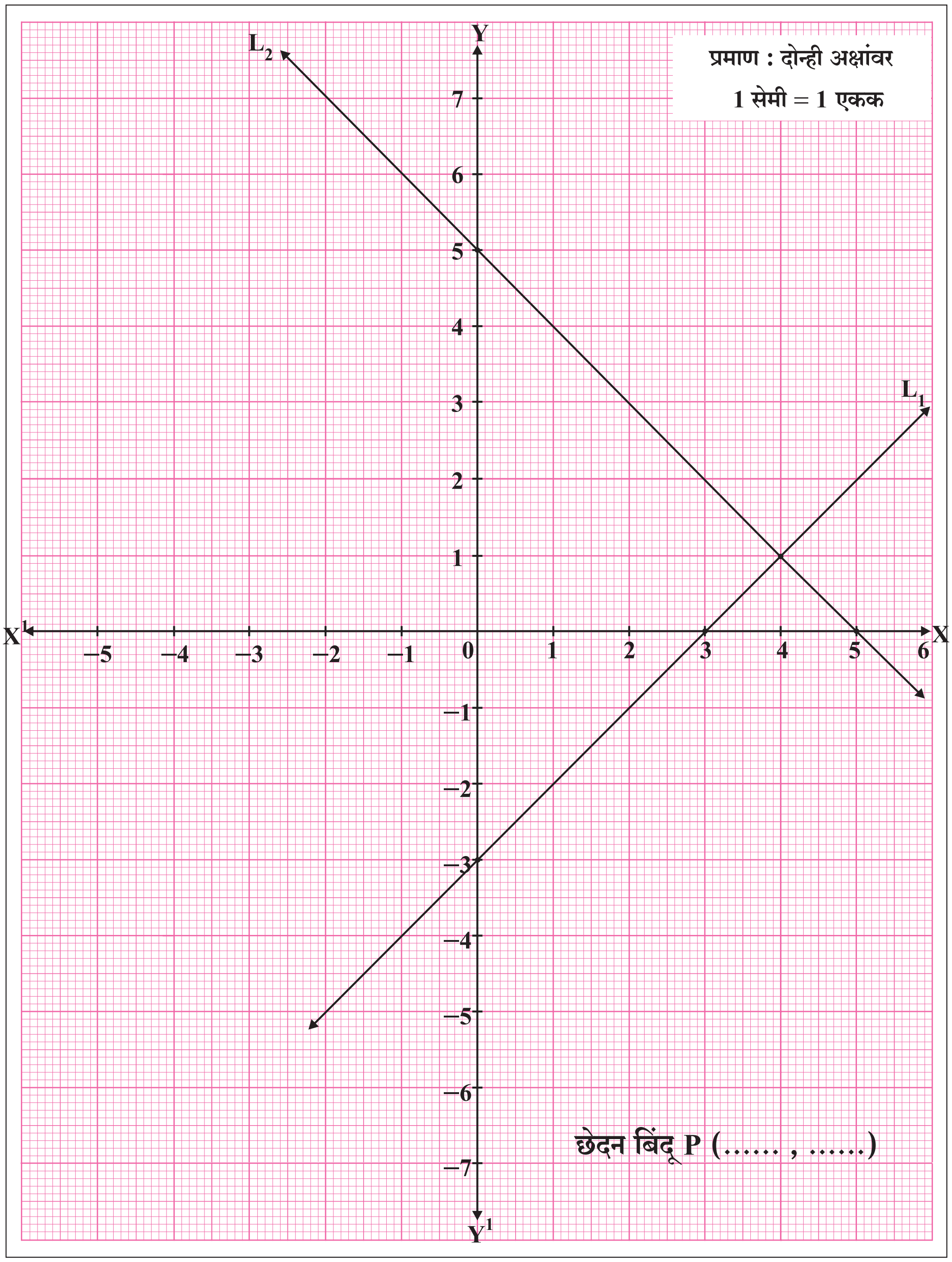
$x = \square$ $\quad y = \square$

$\therefore (x, y) = (\square, \square)$ ही दिलेल्या एकसामायिक समीकरणाची उकल आहे.

12) $x - y = 4$ आणि $x + y = 6$ ही समीकरणे आलेखाच्या साहाय्याने सोडवा.

13) $x - 2y = 4$ आणि $2x - 4y = 12$ ही समीकरणे आलेखाच्या साहाय्याने सोडवा.

14) खाली दिलेल्या आलेखाचे निरीक्षण करा. रेषा L_1 आणि रेषा L_2 यांवरील कोणत्याही तीन बिंदूंचे निर्देशक लिहा. रेषा L_1 आणि रेषा L_2 यांच्या छेदनबिंदूला P नाव द्या व त्याचे निर्देशक आलेखातच लिहा.



रेषा L_1

x			
y			
(x, y)			

रेषा L_2

x			
y			
(x, y)			

15) एका चलाची किंमत 15 व दुसऱ्या चलाची किंमत 10 येईल असे एकसामयिक समीकरणांवर आधारित शाब्दिक उदाहरण तयार करून सोडवा. (मीटर, किलोमीटर, वर्षे, रुपये, किलोग्रॅम इत्यादींचा उपयोग करा.)

16) एक टेबल आणि एक खुर्ची 1896 रुपयांस विकले असता व्यापाऱ्यास टेबलाच्या खरेदी किमतीवर 25% नफा आणि खुर्चीच्या खरेदी किमतीवर 10% नफा होतो. जर त्या व्यापाऱ्याने एक टेबल व एक खुर्ची 1770 रुपयांस विकले, तर टेबलाच्या खरेदी किमतीवर 10% नफा आणि खुर्चीच्या खरेदी किमतीवर 25% नफा होतो, तर टेबल व खुर्चीची प्रत्येकी खरेदी किंमत काढा.

सरावासाठी उदाहरणे

1) एका दोन अंकी संख्येची व त्या संख्येच्या अंकांची अदलाबदल करून येणाऱ्या संख्येची बेरीज 66 आहे. त्या संख्येच्या अंकातील फरक 2 आहे, तर ती संख्या शोधा.

2) ΔABC मध्ये $\angle A = x^{\circ}$, $\angle B = 3x^{\circ}$, $\angle C = y^{\circ}$ जर $3y - 5x = 30$ तर, प्रत्येक कोनाचे माप काढा आणि ΔABC चा प्रकार ओळखा.

3) निश्चयकाची किंमत काढा.

$$\begin{vmatrix} \sin 30^{\circ} & \cos 30^{\circ} \\ \sin 60^{\circ} & \cos 60^{\circ} \end{vmatrix}$$

4) 2 पेन आणि 3 कंपास बॉक्स यांची एकूण किंमत ₹ 425 आहे, तर 3 पेन आणि 2 कंपास बॉक्स यांची एकूण किंमत ₹ 350 आहे, तर एक कंपास बॉक्स आणि एक पेन यांची एकूण किंमत काढा.

5) सोडवा.

$$\frac{a+b}{ab} = 2 \quad ; \quad \frac{a-b}{ab} = 6$$

6) खालील एकसामायिक समीकरणे आलेखाच्या साहाय्याने सोडवा.

i) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$

ii) $3m - 4n = -7$; $5m - 2n = 0$

7) खालील एकसामायिक समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने सोडवा.

i) $4p + 6q = 54$; $3p + 2q = 28$

ii) $6c - 4d = -12$; $8c - 3d = -2$

iii) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

8) एका अपूर्णांकाचा छेद हा अंशाच्या दुपटीपेक्षा 4 ने मोठा आहे, जर अंश आणि छेद दोन्ही 6 ने कमी केले तर छेद हा अंशाच्या 12 पट होतो, तर तो अपूर्णांक शोधा.

9) जर $qx + py = p^2 + q^2$ आणि $px - qy = 0$ तर $x - y$ ची किंमत काढा.

10) सोडवा : $2^{a-b} = 8$ आणि $2^{a+b} = 64$ तर a आणि b च्या किमती काढा.

11) सोडवा : $\frac{6}{p} + \frac{12}{q} = 7$ आणि $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 2$

2. वर्गसमीकरणे

1) खाली दिलेल्या प्रत्येक बहुपदी समोरील चौकटीत त्या बहुपदीची कोटी लिहा.

i) $2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ ☐

ii) $m^3 + 2m^2 - m$ ☐

iii) $y(y+1)$ ☐

iv) $3p + 7$ ☐

v) 12 ☐

2) खाली दिलेल्या बहुपदींपैकी वर्ग बहुपदी समोरील चौकटीत (✓) तसेच वर्ग बहुपदी नसलेल्या बहुपदी समोरील चौकटीत (×) अशी खूण करा.

i) $x^2 + 5x - 6$ ☐

ii) $x(2x^2 - 3x + 8)$ ☐

iii) $m(3m + 2)$ ☐

iv) $x(x + 5)$ ☐

v) $x^3 + 2x^2 - 3x + 7$ ☐

3) मी $5x^2 - 7x - 6$ अशी बहुपदी आहे माझ्याविषयी खालील चौकटीत योग्य ते उत्तर लिहा.

i) वर्गपद = ☐

ii) मध्यपद = ☐

iii) स्थिरपद = ☐

iv) कोटी = ☐

v) वर्गपदाचा सहगुणक = ☐

vi) मध्यपदाचा सहगुणक = ☐

vii) वर्गपदाचा सहगुणक आणि स्थिरपद यांचा गुणाकार = ☐

viii) (– 30) या संख्येचे दोन अवयव ☐ व ☐ आहेत ज्यांची बेरीज (– 7) येते.

4) $2x^2 + 7x = 0$ या वर्गसमीकरणाची त्याच्या सामान्यरूपाशी तुलना करून a, b आणि c यांच्या किमती शोधण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

दिलेले वर्गसमीकरण $2x^2 + 7x = 0$

वर्गसमीकरणाचे सामान्यरूप $\boxed{}$ आहे.

$\therefore a = \boxed{}$; $b = \boxed{}$; $c = \boxed{}$

5) $x^2 = x + 4$ हे वर्गसमीकरण आहे का ते ओळखण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$x^2 = x + 4$ चे सामान्यरूप $x^2 - x - 4 = 0$ आहे.

समीकरणामध्ये असलेल्या चलांची संख्या $= \boxed{}$

चलाचा महत्तम घातांक $= \boxed{}$ $\therefore$ हे वर्गसमीकरण आहे/नाही

6) $3x^2 - kx - 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ 2 आहे, तर k ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

दिलेले वर्गसमीकरण $3x^2 - kx - 2 = 0$ आहे. या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ 2 आहे.

$\therefore x = \boxed{}$ घेऊ

$\therefore 3\boxed{}^2 - k \times \boxed{} - 2 = 0$

$\therefore 12 - 2k - 2 = 0$

$\therefore 2k = \boxed{}$ $\therefore k = \boxed{}$

7) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ हे वर्गसमीकरण अवयव पद्धतीने सोडविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

या वर्गसमीकरणाची $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना केल्यास,

$a = \boxed{}$ $b = \boxed{}$ $c = \boxed{}$

$\therefore a \times c = \boxed{} \times (-3)$ $\therefore ac = \boxed{}$

$\boxed{}$ आणि 1 हे ac या गुणाकाराचे असे दोन अवयव आहेत, की त्यांची बेरीज (-5) आहे.

$\therefore \underline{2x^2 - 6x} + \underline{1x - 3} = 0$

$\therefore 2x(x - \boxed{}) + 1(x - \boxed{}) = 0$

$\therefore (x - \boxed{})\ (2x + 1) = 0$

$\therefore x - \boxed{} = 0$ किंवा $2x + 1 = 0$

$\therefore x = \boxed{}$ किंवा $x = \boxed{}$

$\therefore$ $\boxed{}$ आणि $\boxed{}$ या दिलेल्या वर्गसमीकरणाच्या दोन उकली आहेत.

8) $9m^2 = 16$ हे वर्गसमीकरण अवयव पद्धतीने सोडविण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

$9m^2 = 16 \qquad \therefore 9m^2 - \square = 0$

$\therefore (3m)^2 - (\square)^2 = 0$

$\therefore (3m + \square)(3m - \square) = 0$

$\therefore 3m + \square = 0$ किंवा $3m - \square = 0$

$\therefore m = \square$ किंवा $m = \square$

$\therefore$ $\square$ आणि $\square$ या दिलेल्या वर्गसमीकरणाच्या दोन उकली आहेत.

9) $2x^2 + 13x + 15 = 0$ हे वर्गसमीकरण पूर्ण वर्ग पद्धतीने सोडविण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

वर्ग पदाचा सहगुणक 1 करण्यासाठी समीकरणाला $\square$ ने भाग देऊ.

$x^2 + \frac{13}{\square}x + \frac{15}{2} = 0$

जर $x^2 + \frac{13}{2}x + k = (x + a)^2$ तर $x^2 + \frac{13}{2}x + k = x^2 + 2ax + \square$

$x^2 + \frac{13}{2}x$ आणि $x^2 + 2ax$ यांची तुलना करून

$\frac{13}{2}x = 2ax \qquad \therefore a = \square$

$\therefore k = a^2 = \left(\square\right)^2 = \square$

$\therefore x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{169}{16} - \frac{169}{16} + \frac{15}{2} = 0$

$\therefore \left(x + \square\right)^2 - \left(\frac{169}{16} - \square\right) = 0$

$\therefore \left(x + \square\right)^2 - \square = 0$

$\therefore \left(x + \square\right)^2 = \square$

$\therefore x + \square = \frac{7}{4}$ किंवा $x + \frac{13}{4} = \square$

$\therefore x = \frac{\square}{4}$ किंवा $x = \frac{\square}{4}$

$\therefore x = \frac{\square}{2}$ किंवा $-\square$

$\therefore$ $\square$ किंवा $\square$ या दिलेल्या वर्गसमीकरणाच्या दोन उकली आहेत.

10) $5x^2 - 6x - 2 = 0$ हे वर्गसमीकरण सूत्राचा वापर करून सोडविण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

दिलेल्या वर्गसमीकरणाची $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना केल्यास,

$a = \Box$; $b = \Box$; $c = \Box$;

$\therefore b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times (\Box) \times (\Box)$

$= 36 - \Box = \Box$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-(\Box) \pm \sqrt{\Box}}{2(\Box)}$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{\Box}}{\Box}$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm 2\sqrt{\Box}}{10}$$

$$\therefore x = \frac{2(3 \pm \sqrt{\Box})}{10}$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{\Box}}{5}$$

$$\therefore x = \frac{3 + \sqrt{\Box}}{5} \text{ किंवा } \frac{3 - \sqrt{\Box}}{5}$$

$\therefore$ $\Box$ किंवा $\Box$ या दिलेल्या वर्गसमीकरणाच्या दोन उकली आहेत.

11) $3m^2 + 4m - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणासाठी $b^2 - 4ac$ ची किंमत काढण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा आणि मुळांचे स्वरूप ठरवा.

या ठिकाणी $a = \Box$ $b = \Box$ $c = \Box$

$\Delta = b^2 - 4ac = (\Box)^2 - 4 \times (\Box) \times (\Box)$

$= 16 - 4(\Box)$

$= 16 + \Box = \Box$

$\therefore \Delta = \Box$

$\therefore b^2 - 4ac = \Box$ $\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $\Box$ आहेत.

12) वर्गसमीकरणाची मुळे दिली असता वर्गसमीकरण तयार करण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

मी एक वर्गसमीकरण आहे.

↓

माझी मुळे $\alpha = 3$ आणि $\beta = 4$ आहेत.

↓

मुळांची बेरीज = ☐ मुळांचा गुणाकार = ☐

↓

वर्गसमीकरण तयार करण्यासाठी सूत्र $x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0$

↓

$\therefore$ वर्गसमीकरण ....

13) जर a आणि b ही या $x^2 + ax - b = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे असतील, तर a आणि b च्या किमती काढा.

14) $(x + 3)\,(x - 5) = 0$ हे वर्गसमीकरण सामान्यरूपात लिहून a, b आणि c च्या किमती लिहा.

15) अवयव पद्धतीने सोडवा.

$5t^2 - 13t + 6 = 0$

16) पूर्ण वर्ग पद्धतीने सोडवा.

$h^2 + 10h + 21 = 0$

17) सूत्राचा वापर करून सोडवा.

$6x^2 - 17x + 12 = 0$

18) α आणि β ही $(x + 5)^2 = 35$ या वर्गसमीकरणाची मुळे असतील, तर $\alpha^2 + \beta^2$ ची किंमत काढा.

19) 25 चे असे दोन भाग करा की, त्यांच्या व्यस्त संख्यांची बेरीज $\frac{1}{6}$ असेल.

20) जतीनला एक काम करण्यासाठी नितीनपेक्षा 6 दिवस अधिक लागतात. दोघांनी मिळून काम केल्यास ते काम पूर्ण करण्यासाठी त्यांना 4 दिवस लागतात, तर ते काम एकट्यानेच पूर्ण करण्यास प्रत्येकास किती दिवस लागतील?

सरावासाठी उदाहरणे

1) खालील समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपात लिहा. त्यातील a, b, c यांच्या किमती ठरवा.

   $(x + 1)^2 = 2x + 3$

2) अवयव पद्धतीने सोडवा.

   i) $x + \frac{12}{x} = 7$ ii) $6y^2 - y - 2 = 0$

3) पूर्ण वर्ग पद्धतीने सोडवा.

   i) $4x^2 + x = 3$ ii) $2p^2 + p = 6$

4) सूत्राचा वापर करून सोडवा.

   i) $2m^2 - 1 = 4m$ ii) $x - \frac{3}{x} = 2$

5) $y = -2$ ही किंमत $3y^2 + 5y - 7 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे किंवा नाही ते ठरवा.

6) एका चौरसाची बाजू 6 सेमी ने वाढविल्यास त्याचे क्षेत्रफळ 16 पट होते, तर मूळ चौरसाची बाजू काढा.

7) एका वर्गसमीकरणाची मुळे α आणि β आहेत. जर $\alpha^2 + \beta^2 = 68$ आणि $\alpha - \beta = 6$ असेल, तर ते वर्गसमीकरण तयार करा.

8) $(z - 12)y^2 + 2(z - 12)y + 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव आणि समान असतील, तर z ची किंमत काढा.

9) खालील प्रत्येक समीकरण, वर्गसमीकरण आहे की नाही ते ठरवा.

   i) $k^2 - 2k + 5 = k^2$

   ii) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$

   iii) $\sqrt{2}x^2 + 3x + 4\sqrt{2}$

10) $x^2 + 4x + 6 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे α व β असतील, तर

    i) $\alpha^2 + \beta^2$ ii) $\alpha^3 + \beta^3$ यांच्या किमती काढा.

11) $y^2 - 6y + k = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे α व β असून $\alpha - \beta = z$ तर k ची किंमत काढा.

12) वर्गसमीकरणाची मुळे t आणि $\frac{1}{t}$ असतील, तर ते वर्गसमीकरण लिहा.

3. अंकगणिती श्रेढी

1) खालील क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे की नाही, हे ठरविण्यासाठी सारणी पूर्ण करा.

अ. क्र.	क्रमिका	$t_2 - t_1$	$t_3 - t_2$	$t_4 - t_3$	फरक स्थिर असल्यास d = किती ?	निष्कर्ष
1)	2, 5, 8, 11...	$5 - 2 = 3$	$8 - 5 = 3$	$11 - 8 = 3$	3	अंकगणिती श्रेढी आहे.
2)	0.2, 0.22, 0.222, 0.2222,...					
3)	5, 1, −3, −7, ...					
4)	$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \ldots$					
5)	2, 4, 8, 16, ...					
6)	4, 4, 4, 4, ...					

2) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \ldots$ ही अंकगणिती श्रेढी आहे की नाही, हे ठरविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$t_1 = \sqrt{2}, t_2 = \sqrt{8}, t_3 = \sqrt{18}$

$\therefore t_2 - t_1 = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \square$

$t_3 - t_2 = \sqrt{18} - \sqrt{8} = \square - 2\sqrt{2} = \square$

येथे क्रमागत पदांमधील फरक $d = \square$ स्थिर आहे.

$\therefore$ दिलेली क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

3) **खालील सारणी पूर्ण करा.**

अ. क्र.	a	d	$t_1 = a$	$t_2 = t_1 + d$	$t_3 = t_2 + d$	$t_4 = t_3 + d$	अंकगणिती श्रेढी
1)	3	4	3	$3 + 4 = 7$	$7 + 4 = 11$	$11 + 4 = 15$	$\therefore$ 3, 7, 11, 15, ...
2)	5	-3	5	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
3)	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\frac{1}{3}$	1	$-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \ldots$
4)	-3.5	$\square$	-3.5	-1.5	$\square$	$\square$	$\square$
5)	$\square$	0	$\square$	-4	-4	$\square$	$\square$

4) **एका अंकगणिती श्रेढीचा सामान्य फरक 5 आहे, तर $t_{17} - t_9 =$ किती? हे काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

येथे $d = 5$

$\therefore t_{17} = a + 16\,d$ आणि $t_9 = a + \square\, d$

$\therefore t_{17} - t_9 = [a + 16\,d] - [a + \square\, d]$

$= \square\, d$

$= \square \times 5$

$\therefore t_{17} - t_9 = \square$

5) **एका अंकगणिती श्रेढीची तीन क्रमागत पदे अनुक्रमे $3x$, 7 आणि $2x - 1$ आहेत, तर x ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

येथे $t_1 = 3x$, $t_2 = 7$, $t_3 = 2x - 1$

अंकगणिती श्रेढीच्या क्रमागत पदांमधील फरक स्थिर असतो.

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - \square$

$\therefore 7 - 3x = 2x - 1 - \square$

$\therefore\ 7 + 1 + 7 = 2x + 3x$

$\therefore\ 5x = \boxed{}$

$\therefore\ x = \boxed{}$

6) **एका अंकगणिती श्रेढीतील पदे पुढीलप्रमाणे आहेत.**

– 2, ★, ∧, ⊕, ✳, 8, ... तर त्या अंकगणिती श्रेढीचा सामान्य फरक आणि पंधरावे पद व ⊕ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

येथे $t_1 = a = \boxed{}$

तसेच $t_6 = \boxed{}$

परंतु $t_6 = a + 5d$

$\therefore\ a + 5d = \boxed{}$ ..... (I)

आता a ची किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$\therefore\ \boxed{} + 5d = 8$

$\therefore\ 5d = \boxed{}$

$\therefore\ d = \frac{10}{5}$

$\therefore$ सामान्य फरक $(d) = \boxed{}$

$\therefore\ t_{15} = a + \boxed{}\ d$

$= -2 + \boxed{} \times 2$

$= -2 + \boxed{}$

$\therefore$ पंधरावे पद $(t_{15}) = \boxed{}$

आता ⊕ हे $\boxed{}$ वे पद आहे.

$\therefore\ t_n = a + (n-1)\,d$ नुसार,

$\therefore\ \oplus = -2 + (\boxed{} - 1) \times 2$

$\therefore\ \oplus = -2 + \boxed{}$

$\therefore\ \oplus = \boxed{}$

7) **– 3, 4, 11, ..., 235 या अंकगणिती श्रेढीतील पदांची एकूण संख्या काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

दिलेल्या श्रेढीवरून

$a = -3,\ d = \boxed{},\ t_n = 235$

सूत्र : $t_n = \boxed{a + (n-1)\,d}$

$\therefore\ 235 = -3 + (n-1) \times \boxed{}$

$\therefore\ n = \boxed{}$

8) तीन अंकी नैसर्गिक संख्यासमूहातील 6 ने नि:शेष भाग जाणाऱ्या सर्व संख्यांची बेरीज काढण्यासाठी खालील कृती करा.

6 ने भाग जाणाऱ्या तीन अंकी संख्या

102, 108, 114, ..., 996

येथे $a = 102,\ d = \square,\ t_n = \square$

i) प्रथम n शोधू. $\therefore\ t_n = a + (n-1)\,d$

$\therefore\ \square = 102 + (n-1) \times \square$

$\therefore\ 996 = 102 + 6n - 6$

$\therefore\ 6n = 996 - \square$

$\therefore\ 6n = \square$ $\qquad \therefore\ n = \square$

ii) आता S_n शोधू. $S_n = \frac{n}{2}\,[t_1 + t_n]$

$\therefore\ S_n = \frac{\square}{2}\,[102 + 996]$

$\therefore\ S_n = \square \times 1098 \qquad \therefore\ S_n = \square$

$\therefore$ तीन अंकी नैसर्गिक संख्यासमूहातील 6 ने नि:शेष भाग जाणाऱ्या सर्व संख्यांची बेरीज $= \square$

9) एका त्रिकोणाच्या कोनांची मापे अंकगणिती श्रेढीमध्ये आहेत. जर सर्वांत मोठ्या कोनाचे माप हे सर्वांत लहान कोनाच्या मापाच्या दुप्पट असेल, तर त्यांची मापे शोधण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

त्रिकोणाच्या कोनांची मापे अनुक्रमे $(a-d)^\circ,\ a^\circ,\ (a+d)^\circ$ मानू.

$\therefore$ त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेच्या गुणधर्मानुसार

$(a-d) + a + (a+d) = \square$

$\therefore\ 3a = \square$

$\therefore\ a = \square$

तसेच दिलेल्या अटीनुसार $(a+d) = 2 \times (a-d)$

$\therefore\ a + d = 2a - 2d$

$\therefore\ d + 2d = 2a - a$

$\therefore\ 3d = \square$

$\therefore\ d = \frac{\square}{3} = \frac{\square}{3} = \square$

$\therefore$ पहिल्या कोनाचे माप $= (a-d)^\circ = \square$

दुसऱ्या कोनाचे माप $= a^\circ = \square$

तिसऱ्या कोनाचे माप $= (a+d)^\circ = \square$

10) वर्गातील गुणानुक्रमे प्रथम पाच विद्यार्थ्यांना बक्षीस वाटपासाठी एका दानशूर व्यक्तीने एकूण ₹ 1500 दिले. जर प्रत्येक बक्षीस अगोदरच्या बक्षिसापेक्षा 50 रुपयांनी कमी असेल, तर प्रथम क्रमांकाच्या विद्यार्थ्यास किती बक्षीस मिळेल हे शोधण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

येथे $S_n = 1500$, $d =$ ☐ , $n = 5$, $a =$ किती ?

सूत्र : $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore 1500 = \frac{5}{2}\left[2a + (5-1) \times \square\right]$

$\therefore 1500 = \frac{5}{2}\left[2a - \square\right]$

$\therefore 3000 = 10a - \square$

$\therefore 10a = \square$

$\therefore a = \square$

∴ प्रथम क्रमांकाच्या विद्यार्थ्यास मिळणारे बक्षीस = ₹ ☐

(**टीप :** यापेक्षा वेगळ्या पद्धतीने हे उदाहरण सोडवता येईल का? वहीत सोडवा.)

11) $3 + 5 + 7 + \dots\dots\dots + x$ या बेरजेतील पदे अंकगणिती श्रेढीत आहेत का ते ठरवा. सर्व पदांची बेरीज 168 असल्यास x ची किंमत काढा.

सरावासाठी उदाहरणे

1) i) पहिले पद कोणतीही ऋण संख्या आणि सामान्य फरक कोणतीही धन संख्या असणारी, अंकगणिती श्रेढी लिहा.

ii) त्या श्रेढीत 50 हे पद असेल का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

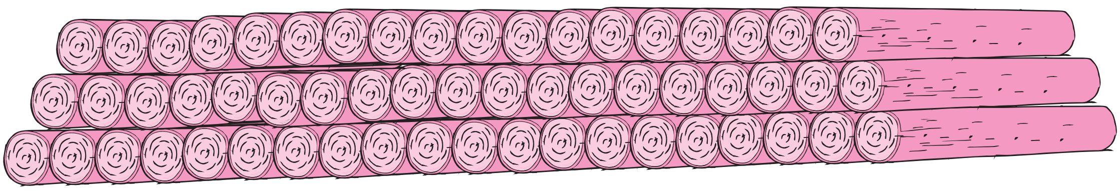
iii) सूत्राचा वापर करून तिच्या पहिल्या 20 पदांची बेरीज शोधा.

2) आकाशला 200 मी. धावण्याच्या शर्यतीत सहभाग घ्यायचा आहे. त्यासाठी तो दररोज धावण्याचा सराव करतो. सरावामध्ये त्याने पहिल्या दिवशी 1 मिनिट, 3 सेकंद, दुसऱ्या दिवशी 59 सेकंद, तिसऱ्या दिवशी 55 सेकंद याप्रमाणे वेळ नोंदवली.

i) सरावामध्ये त्याने नोंदविलेली वेळ अंकगणिती श्रेढीमध्ये आढळते का ते ठरवा.

ii) 200 मी. अंतर 35 सेकंदात पार करण्याचे आकाशचे ध्येय आहे. जर प्रत्येक दिवशी सरावामध्ये नोंदविलेली वेळ अंकगणिती श्रेढीमध्ये असेल तर त्याचे ध्येय साध्य होण्यासाठी त्याला किमान किती दिवस सराव करणे आवश्यक आहे?

3) सोबतच्या आकृतीमध्ये लाकडाचे समान आकाराचे काही ओंडके विशिष्ट प्रकारे रचून ठेवलेले आहेत. आकृतीमध्ये तीनच थर दर्शविलेले आहेत, परंतु त्यावर आणखी काही थर वाढवून अन्य काही ओंडके रचावयाचे आहेत. एकूण 200 ओंडके रचण्यासाठी आणखी किती थर वाढवावे लागतील? सर्वांत वरच्या थरात किती ओंडके असतील?



4) एका अंकगणिती श्रेढीचे चौथे पद 22 व 15 वे पद 66 असेल तर पहिले पद, साधारण फरक तसेच पहिल्या 8 पदांची बेरीज किती येईल ते काढा.

5) दोन अंकगणिती श्रेढींच्या n पदांचे गुणोत्तर $(3n + 8) : (7n + 15)$ असेल त्या श्रेढींच्या 12 व्या पदांचे गुणोत्तर काढा.

6) एका अंकगणिती श्रेढीचे p वे पद $5p + 1$ असेल, तर त्या श्रेढीच्या n पदांची बेरीज काढा.

4. अर्थनियोजन

वस्तू व सेवा कर

1) **कर बीजकाचे निरीक्षण करा आणि खाली दिलेल्या प्रश्नांची अचूक उत्तरे लिहा.**

Name : Mr. A. B.
Address : Nagpur
State : Maharashtra

Invoice No. : 12005150
Date : 29-12-2021
GSTIN : 27ABCDE0716P2ZY

Description	**HSN Code**	**Pcs.**	**Rate**	**Taxable Amount**
Mobile	7114	1	20,000	20,000
Total :		1		20,000

Taxable Amount	20,000
SGST 9%	1,800
CGST 9%	1,800
Grand Total	**23,600**

In words : Rs. Twenty Three Thousand Six Hundred Only.

1) GST नंबर लिहा. ....

2) GST नंबरवरून महाराष्ट्राचा राज्य संकेतांक लिहा. ....

3) HSN कोड हा वस्तूशी निगडित आहे की, सेवेशी निगडित आहे हे लिहा. ....

4) GST चा दर किती आहे? ....

5) केंद्रीय कर (CGST) किती रुपये आहे? ....

6) राज्याचा कर (SGST) किती रुपये आहे? ....

7) करपात्र रक्कम? ....

8) एकूण देय रक्कम? ....

2) एका वस्तूची विक्री किंमत ₹ 500 आहे. त्या वस्तूवर CGST चा दर 9% असेल, तर त्या वस्तूवरील GST ची रक्कम काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

वस्तूची विक्री किंमत = ☐

वस्तूवरील CGST चा दर = ☐

वस्तूवरील GST चा दर = 2 × ☐

= ☐ %

वस्तूवरील GST ची रक्कम = $\frac{500 \times \square}{100}$ = ☐

3) एका दुकानदाराने ₹ 10,000 करपात्र किमतीचे धुलाईयंत्र विकत घेतले व ते यंत्र ₹ 15,000 ला विकले. वस्तू व सेवा कराचा दर (GST) 18% असल्यास दुकानदारास या व्यवहारात किती रुपयांची वजावट (ITC) मिळेल? त्याचा देय GST काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

धुलाईयंत्राची खरेदी किंमत	GST चा दर	दुकानदाराने दिलेली GST ची रक्कम	ITC वजावट	धुलाईयंत्राची विक्री किंमत	दुकानदाराने आकारलेली GST ची रक्कम	दुकानदारास देय GST
₹ 10,000	☐	$10,000 \times \frac{18}{100}$ = ☐		₹ 15,000	$15,000 \times \frac{18}{100}$ = ☐	☐ − 1800 = ☐

4) खालील सारणी पूर्ण करा.

उदाहरण	दर्शनी किंमत	मूल्यप्रकार	बाजारभाव
1)	₹ 12	सममूल्य	....
2)	₹ 30	....	₹ 24
3)	....	अधिमूल्य ₹ 90	₹ 320
4)	₹ 110	अवमूल्य ₹ 70	....
5)	₹ 50	....	₹ 50
6)	₹ 100	....	₹ 80

5) शेअर बाजारात ₹ 50 दर्शनी किमतीचे दोन कंपन्यांचे शेअर्स खालीलप्रमाणे बाजारभाव व लाभांशाच्या दराने आहेत, तर कोणत्या कंपनीतील गुंतवणूक जास्त फायदेशीर होईल हे दाखविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा. i) कंपनी A : ₹ 250, 10%　　ii) कंपनी B : ₹ 150, 15%

कंपनी A

एका शेअरचे दर्शनी मूल्य = ☐

लाभांशाचा दर = ☐

मिळणारा लाभांश $= 50 \times \frac{\square}{100}$

= ₹ ☐

परताव्याचा दर = $\frac{\text{मिळणारा लाभांश}}{\text{गुंतवणूक}} \times 100$

$= \frac{\square}{250} \times 100$

= ₹ ☐

कंपनी B

एका शेअरचे दर्शनी मूल्य = ☐

लाभांशाचा दर = ☐

मिळणारा लाभांश $= 50 \times \frac{\square}{100}$

= ₹ ☐

परताव्याचा दर = $\frac{\text{मिळणारा लाभांश}}{\text{गुंतवणूक}} \times 100$

$= \frac{\square}{\square} \times 100$

= ₹ ☐

∴ कंपनी ☐ मधील गुंतवणूक फायदेशीर ठरेल.

6) म्युच्युअल फंड योजनेचे बाजारमूल्य 280 कोटी रुपये असून कंपनीने 7 कोटी युनिट्स खरेदी केले असतील तर i) एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य (NAV) काढा.

ii) तुम्ही ₹ 10,000 ची गुंतवणूक केली, तर तुम्हाला किती युनिट्स मिळतील?

रीत : i) एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य (NAV) = $\frac{\text{280 कोटी रुपये}}{\text{7 कोटी}}$

एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य (NAV) = ₹ ☐

ii) युनिटची संख्या = $\frac{\text{केलेली गुंतवणूक}}{\text{एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य}}$

$= \frac{\square}{\square}$

₹ 10,000 गुंतविल्यावर = ☐ युनिट्स मिळतील.

सरावासाठी उदाहरणे

1) अक्षयने ₹ 100 दर्शनी किमतीचे शेअर्स, बाजारभाव ₹ 50 असताना विकले, तेव्हा त्यास ₹ 4988.20 मिळाले. दलालीचा दर 0.2% व दलालीवरील जीएसटीचा दर 18% आहे, तर त्याने किती शेअर्स विकले ते काढा.

2) शेअर बाजारात ₹ 100 दर्शनी किमतीचे दोन कंपन्यांचे शेअर्स खालीलप्रमाणे बाजारभाव व लाभांशाच्या दराने आहेत, तर कोणत्या कंपनीतील गुंतवणूक जास्त फायदेशीर होईल ते सकारण सांगा.

   i) कंपनी A : ₹ 132 ...... 12%   ii) कंपनी B : ₹ 144 ...... 16%

   iii) कंपनी C : ₹ 156 ...... 18%

3) ₹ 36,000 किमतीच्या एका वस्तूवर व्यापाऱ्याने 10 % सूट देऊन उरलेल्या रकमेवर 18 % दराने CGST आकारला तर एकूण बिल किती रकमेचे असेल? त्यात CGST व SGST शीर्षकाखाली किती रक्कम आकारली असेल?

4) प्रज्ञाने खालीलप्रमाणे शेअर्समध्ये गुंतवणूक केली, तर तिने केलेली एकूण गुंतवणूक काढा.

   कंपनी A - दर्शनी किंमत ₹ 5 आणि अधिमूल्य ₹ 15 असलेले 300 शेअर्स

   कंपनी B - बाजारभाव ₹ 600 असलेले 40 शेअर्स

   कंपनी C - बाजारभाव ₹ 9,600 असणारे 2 शेअर्स

5) सौ. संजना नोंदणीकृत व्यापारी आहेत. त्यांनी ₹ 1,05,000 करपात्र किमतीचा सोलारपंप विकत घेतला व ₹ 1,32,000 ला ग्राहकास विकला. वस्तू व सेवा कराचा दर 5% असल्यास संजनास या व्यवहारात किती रुपयांची वजावट (ITC) मिळेल व किती रुपये कर भरावा लागेल?

6) एका घड्याळाची जीएसटी करासह किंमत 1,475 रुपये आहे. जीएसटीचा दर 18% आहे तर, त्या घड्याळाची करपात्र किंमत, त्यावरील CGST व SGST चे गणन करा.

7) श्री. नटराजन यांनी ₹ 58,000 किमतीचे संगणक विकत घेतले व 65,000 रुपयांना विकले. वस्तू व सेवा कराचा दर 5% असल्यास त्यांना या व्यवहारात किती रुपयांची वजावट (ITC) व किती रुपये कर भरावा लागेल?

8) ₹ 100 दर्शनी किमतीचे शेअर्स ₹ 15 अधिमूल्य देऊन ₹ 39,790 ला खरेदी केले, तर किती शेअर्स मिळतील?

9) ₹ 625 दर्शनी किमतीचा एक शेअर सममूल्य बाजारभावाने विकला व त्यावर 0.1% दलाली दिली, तर विक्रीनंतर मिळणारी रक्कम किती?

10) ग्राहकाकडून एका वस्तूची जीएसटीसहित किंमत ₹ 5,900 घेतली. जर वस्तूंची करपात्र किंमत ₹ 5,000 असेल, तर जीएसटीचा दर किती?

11) ठोक व्यापारी A ने किरकोळ व्यापारी B ला एक वस्तू ₹ 60,000 ला विकली व्यापारी B ने ₹ 8,000 नफा घेऊन ती वस्तू ग्राहकांस विकली या व्यवहारात जीएसटीचा दर 12.5% आहे, तर ग्राहकाला ती वस्तू किती रुपयांना पडली?

5. संभाव्यता

1) खालील बाबतीत किती शक्यता आहेत ते चौकटीत लिहा.

1) इंग्रजी वर्षातील महिना यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचा आहे. ☐

2) 1 ते 50 पर्यंतच्या मूळ संख्येतील एक संख्या यादृच्छिक पद्धतीने निवडायची आहे. ☐

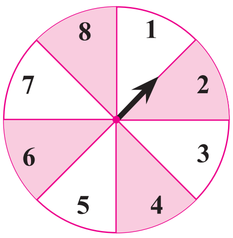
3) इंग्रजी मुळाक्षरांमधील एक स्वर यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचा आहे. ☐

4) इंग्रजी मुळाक्षरांमधील एक व्यंजन यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचे आहे. ☐

5) महाराष्ट्रातील एक जिल्हा यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचा आहे. ☐

2) खालील प्रयोगासाठी नमुना अवकाश S व त्यातील नमुना घटकांची संख्या n(S) लिहा.

1) आकृतीत दाखविलेल्या तबकडीवरील बाण फिरल्यावर तो एका अंकावर स्थिर होतो.



S = {..............................}

n(S) = ☐

2) एक फासा आणि एक नाणे फेकले असता मिळणारा नमुना अवकाश लिहा.

S = {..} n(S) = ☐

3) 0, 3, 5 या अंकांपासून अंकांची पुनरावृत्ती न करता तीन अंकी संख्या तयार करणे.

S = {..} n(S) = ☐

3) एक नाणे तीनदा फेकले असता नमुना अवकाश आणि मिळणारी घटना लिहिण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

नमुना अवकाश S = {HHH, ☐, HHT, ☐, HTH, ☐, HTT, ☐}

$\therefore$ n(S) = ☐

घटना A : पहिल्या नाण्यावर छापा येणे.

A = {...} ; n(A) = ☐

घटना B : तिसऱ्या वेळी नाण्यावर काटा येणे.

B = {..} ; $n(B) = \square$

घटना C : दुसऱ्या आणि तिसऱ्या वेळी नाण्यावर छापा येणे.

C = {..} ; $n(C) = \square$

4) खालीलपैकी कोणत्या संख्या संभाव्यता दर्शवितात ते लिहा.

1.03,   102%,   0,   − 35,   − 0.5, $\frac{4}{3}$,   13%, $\frac{3}{4}$,   0.68

संभाव्यता दर्शविणाऱ्या संख्या	....	कारण ....
संभाव्यता न दर्शविणाऱ्या संख्या	....	कारण ....

5) विद्या विकास शाळेतील सर्व शिक्षकांची रक्तगट तपासणी केली असता खालील माहिती मिळाली.

रक्तगट	A	B	AB	O
शिक्षक संख्या	12	18	14	6

या सर्व शिक्षकांमधून 2 शिक्षक निवडले, तर निवडलेले शिक्षक AB या रक्तगटाचे असण्याची संभाव्यता खालील कृतीने काढा.

समजा S हा नमुना अवकाश आहे.

$\therefore$ शाळेतील एकूण शिक्षक $n(S) = \square$

घटना A : निवडलेले शिक्षक AB या रक्तगटाचे असणे.

$n(A) = \square$

$P(A) = \frac{n(A)}{\square} = \frac{\square}{\square}$

$\therefore P(A) = \frac{\square}{\square}$

$\therefore$ निवडलेले शिक्षक हे AB या रक्तगटाचे असणे ही संभाव्यता $\square$ आहे.

6) **एका समूहामध्ये 140 व्यक्ती आहेत. प्रत्येक व्यक्ती कोणतीतरी एकच भाषा बोलते. यांपैकी 75 व्यक्ती इंग्रजी बोलतात व उर्वरित व्यक्ती मराठी भाषेत बोलतात. त्या समूहातील एक व्यक्ती निवडल्यास मराठी भाषा बोलणाऱ्या व्यक्तींची संभाव्यता पुढील कृतीने काढा.**

समजा S हा नमुना अवकाश आहे.

$\therefore$ समूहातील व्यक्तींची एकूण संख्या $n(S) = \square$

घटना A : निवडलेली व्यक्ती मराठी भाषा बोलणारी असणे.

$n(A) = \square$

$\therefore$ मराठी भाषा बोलणाऱ्या व्यक्तींची संभाव्यता

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

$\therefore P(A) = \square$

7) **एका पेटीमध्ये 12 जेल (Gel) पेन आणि 132 बॉल पेन आहेत. एक पेन यादृच्छिक पद्धतीने पेटीमधून घेतले तर ते पेन i) जेल पेन ii) बॉल पेन असण्याची संभाव्यता खालील कृतीने काढा.**

समजा S हा नमुना अवकाश आहे.

$\therefore n(S) = \square + \square = \square$

i) घटना A : जेल पेन असणे.

$n(A) = \square$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{\square}$

$P(A) = \square$

$\therefore$ जेल पेन निवडण्याची संभाव्यता $\square$ आहे.

ii) घटना B : बॉल पेन असणे.

$\therefore n(B) = \square$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)}$

$P(B) = \square$

$\therefore$ बॉल पेन निवडण्याची संभाव्यता $\square$ आहे.

8) एका बरणीमध्ये 24 गोट्या आहेत. त्यांपैकी काही हिरव्या रंगाच्या आणि उरलेल्या निळ्या रंगाच्या आहेत. जर बरणीमधून एक गोटी घेतली, तर ती हिरव्या रंगाची असण्याची संभाव्यता $\frac{2}{3}$ असेल, तर बरणीमधील निळ्या गोट्यांची संख्या किती असेल?

समजा S हा नमुना अवकाश आहे.

$\therefore$ बरणीतील गोट्यांची संख्या $n(S) = \square$

बरणीमध्ये असणाऱ्या हिरव्या गोट्यांची संख्या x मानू.

$\therefore$ बरणीमध्ये असणाऱ्या निळ्या गोट्यांची संख्या $= \square$

घटना A : घेतलेली गोटी हिरवी असणे.

$\therefore n(A) = \square$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

परंतु $P(A) = \frac{2}{3}$ ($\therefore$ दिलेले)

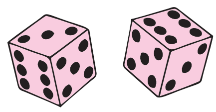
$\therefore \frac{2}{3} = \frac{x}{24}$ $\quad \therefore x = \square$

$\therefore$ हिरव्या रंगाच्या गोट्यांची संख्या $= \square$

$\therefore$ निळ्या रंगाच्या गोट्यांची संख्या $= \square - \square = \square$

9) दोन फासे एका वेळी फेकले असता नमुना अवकाश लिहा व नमुना अवकाशातील घटकांची संख्या लिहा.

S =



$\therefore n(S) = \square$

10) उदाहरण क्रमांक 9 मधील नमुना अवकाशावरून पुढील सारणी पूर्ण करा.

घटना	घटनेचे वर्णन	घटनेतील घटक व घटक संख्या	घटनेची संभाव्यता
A	फाश्यांच्या पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज 7 येणे.	A = {................................} n (A) =	P (A) =
B	फाश्यांच्या पृष्ठभागावरील अंकांचा गुणाकार वर्गसंख्या असणे.		
C	फाश्यांच्या पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज 13 असणे.		

सरावासाठी उदाहरणे

1) इयत्ता दहावीची एकूण विद्यार्थी संख्या ही इयत्ता दहावीतील चष्मा असलेल्या विद्यार्थ्यांच्या संख्येच्या वर्गाच्या तिप्पटीपेक्षा 25 ने कमी आहे. जर त्या वर्गातील एक विद्यार्थी निवडला तर चष्मा असलेल्या विद्यार्थ्यांची संभाव्यता $\frac{1}{10}$ येते, तर वर्गातील एकूण विद्यार्थी संख्या आणि चष्मा असलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या काढा.

2) एका आयताकृती मैदानाची लांबी आणि रुंदी यांचे गुणोत्तर 7 : 6 आहे, त्या मैदानाच्या रुंदीच्या $\frac{1}{2}$ एवढी बाजू असलेला चौरसाकृती जलतरण तलाव आहे. त्या मैदानावर काही खेळाडू फुटबॉल खेळत आहेत, तर फुटबॉल जलतरण तलावात जाणार नाही ही संभाव्यता काढा.

3) 52 पत्त्यांच्या कॅटमधून राणीचे चित्र असलेले पत्ते बाजूला ठेवले. उर्वरित पत्त्यांमधून एक पत्ता काढल्यास पुढील संभाव्यता काढा.

   (1) चित्र असलेला पत्ता काढणे.

   (2) बदाम असलेला पत्ता काढणे.

   (3) बदाम नसलेला पत्ता काढणे.

   (4) लाल रंगाचा चित्र असलेला पत्ता काढणे.

4) एक नाणे तीन वेळा फेकले असता, वरील पृष्ठभागावर छापापेक्षा काटा अधिक वेळा मिळण्याची संभाव्यता काढा.

5) लीप वर्षामध्ये 53 शनिवार येण्याची संभाव्यता काढा.

6) 1 ते 50 या अंकांमधून एक अंक निवडला, तर तो मूळ संख्या नसण्याची संभाव्यता काढा.

6. सांख्यिकी

1) कोविड सुरक्षा समितीसाठी विद्यार्थ्यांनी जमा केलेली रक्कम खालील सारणीत दिलेली आहे. या माहितीवरून जमा केलेल्या रकमेचा मध्य काढा.

रक्कम (₹)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
विद्यार्थी संख्या	5	7	5	2	6

रक्कम	वर्गमध्य (x_i)	विद्यार्थी संख्या (f_i)	$x_i f_i$
0 - 10		5	
10 - 20		7	
20 - 30		5	
30 - 40		2	
40 - 50		6	
—	—	$\sum f_i =$	$\sum x_i f_i =$

i) वर्गमध्याचे सूत्र लिहा. वर्गमध्य $= \dfrac{\square + \square}{2} =$

ii) विद्यार्थ्यांची एकूण संख्या लिहा. $\sum f_i = \square$

iii) $\sum f_i x_i = \square$

iv) मध्य $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ $\quad \bar{x} = \dfrac{\square}{\square}$ $\quad \therefore \bar{x} = \square$

$\therefore$ विद्यार्थ्यांनी जमा केलेल्या रकमेचा मध्य = ₹ $\square$

2) खालील सारणीत विद्यार्थ्यांच्या चाचणी परीक्षेच्या गुणांची टक्केवारी दिली आहे. त्यावरून गुणांच्या टक्केवारीचा मध्य गृहीतमध्य पद्धतीने काढा.

गुण	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
विद्यार्थी संख्या	3	5	7	10	12	15	12	6	2	8

रीत : गृहीतमध्य (A) = 55 घेऊ.

गुण	वर्गमध्य (x_i)	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 55$	वारंवारता (f_i)	$f_i d_i$
0 - 10	5	– 50	3	– 150
10 - 20	☐	– ☐	5	– 200
20 - 30	25	– 30	7	– 210
30 - 40	35	– 20	10	– ☐
40 - 50	☐	– 10	12	– 120
50 - 60	55 ⟶ A	0	15	0
60 - 70	65	☐	12	120
70 - 80	75	20	6	☐
80 - 90	85	30	2	60
90 - 100	☐	40	8	320
			$\sum f_i =$ ☐	$\sum f_i d_i =$ ☐

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

$$\therefore \bar{d} = \frac{\square}{\square}$$

$$\therefore \boxed{\bar{d} = -3.25}$$

मध्य ($\bar{x}$) = A + $\bar{d}$

$\therefore \bar{x} = 55 + \square$

$\therefore \bar{x} = \square$

गुणांच्या टक्केवारीचा मध्य = ☐

3) **खालील माहितीवरून मध्य प्रमाण विचलन पद्धतीने एका दुकानदाराने विकलेल्या शर्टच्या साईजचा मध्य काढा.**

शर्टची साईज (इंच मध्ये)	22 - 24	24 - 26	26 - 28	28 - 30	30 - 32
शर्टची संख्या	21	23	27	19	10

शर्टची साईज (इंच मध्ये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 25$	$u_i = \frac{d_i}{g}$ (g = 2 घेऊ)	शर्टची संख्या (f_i)	$f_i u_i$
22 - 24	23	– 2	– 1	21	– 21
24 - 26	25 → A	0	0	23	00
26 - 28	☐	☐	☐	27	☐
28 - 30	29	4	2	19	38
30 - 32	☐	☐	☐	10	☐
—	—	—		$\sum f_i =$ ☐	$\sum f_i u_i =$ ☐

$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

$\therefore \bar{u} = \frac{\square}{\square}$

$\therefore \bar{u} = \square$

मध्य $(\bar{x}) = A + \bar{u}\, g$

$\therefore \bar{x} = 25 + \square \times 2$

$\therefore \bar{x} = 25 + \square$

$\therefore \bar{x} = \square$

$\therefore$ शर्टच्या साईजचा मध्य = ☐ इंच

4) **खालील वारंवारता सारणीत काही कुटुंबांचा मासिक वीज वापर दिलेला आहे. त्यावरून वीज वापराचे बहुलक काढा.**

वीज वापर (युनिट)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100
कुटुंब संख्या	04	16	47	65	08

रीत :

वीज वापर (युनिट)	कुटुंब संख्या
0 - 20	04
20 - 40	16
40 - 60	47
60 - 80 →	← 65
80 - 100	08

1) कोणत्या वर्गाची वारंवारता सर्वांत जास्त आहे? ☐ व किती आहे? ☐

2) ∴ बहुलकीय वर्ग = ☐ f_1 = ☐

3) बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा किती आहे? (L) = ☐

4) बहुलकीय वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची वारंवारता किती आहे? (f_0) = ☐

5) बहुलकीय वर्गाच्या पुढच्या वर्गाची वारंवारता किती आहे? (f_2) = ☐

6) बहुलकीय वर्गाचे वर्गांतर (h) = ☐

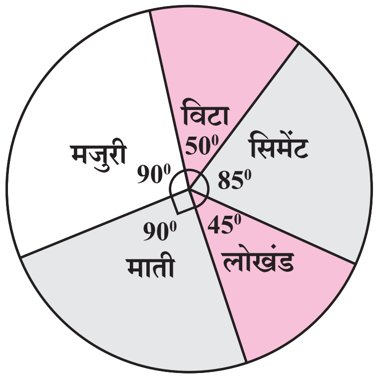
बहुलक $= L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

∴ =

=

∴ बहुलक = ☐

5) एका इमारतीच्या बांधकामासाठी वेगवेगळ्या बाबींवर केलेला खर्च सोबतच्या वृत्तालेखात दर्शविला आहे. त्या माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

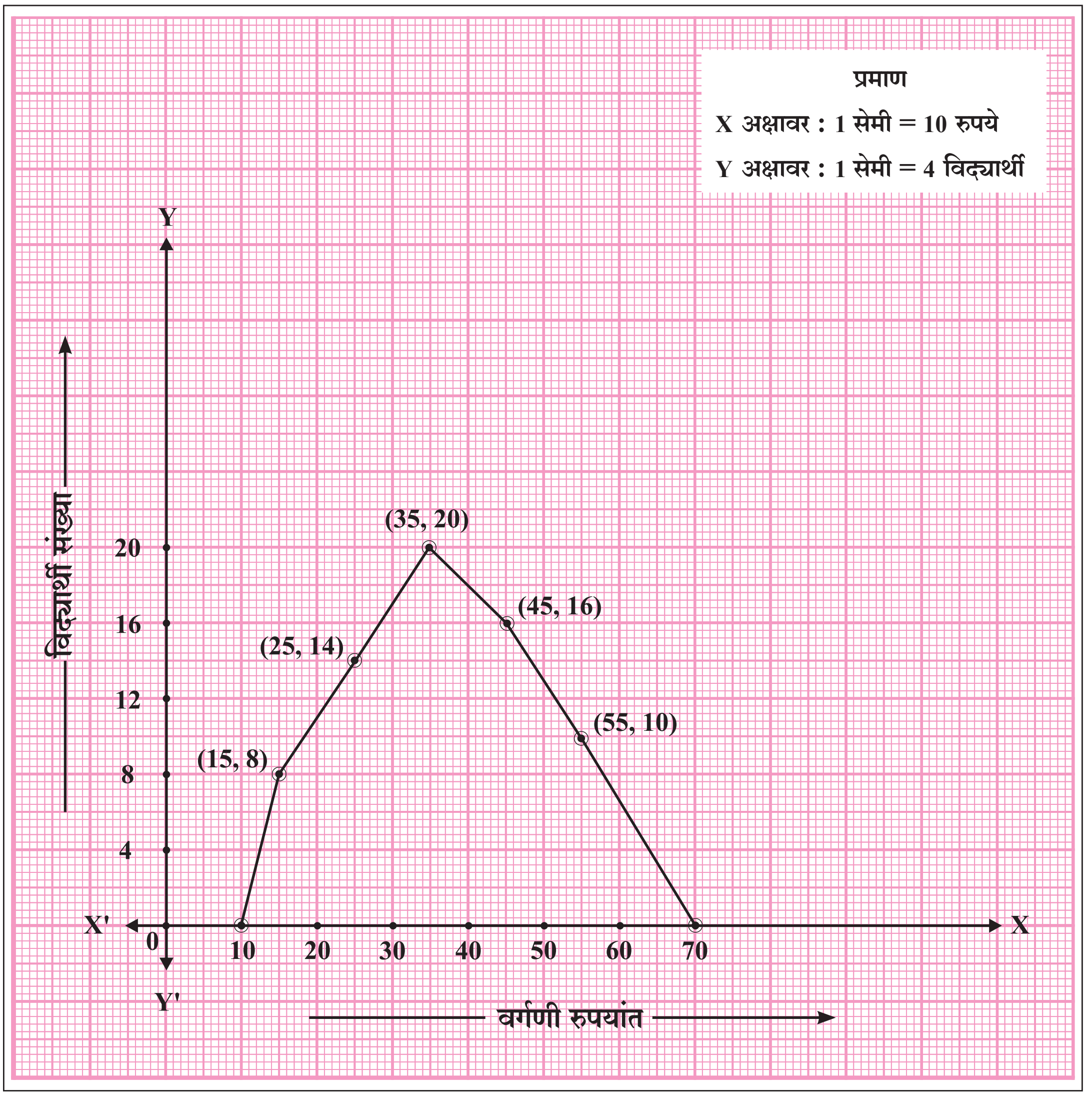


i) इमारतीच्या बांधकामासाठी झालेला एकूण खर्च ₹ 5,40,000 आहे, तर प्रत्येक बाबीवर किती रुपये खर्च झाला ते काढा.

ii) कोणत्या बाबीवर सर्वांत जास्त खर्च झाला व किती रुपये झाला?

iii) कोणत्या बाबीवर सर्वांत कमी खर्च झाला व किती रुपये झाला?

6) **बहुभुजाचे निरीक्षण करून खाली दिलेल्या प्रश्नांची उत्तरे लिहा.**



i) सर्वांत जास्त विद्यार्थी संख्या कोणत्या वर्गाची आहे?

....

ii) शून्य वारंवारता असणारे वर्ग लिहा.

....

iii) 20 विद्यार्थी संख्या असणाऱ्या वर्गाचा वर्गमध्य काढा?

....

iv) वर्गमध्य 55 असणाऱ्या वर्गाची खालची व वरची वर्गमर्यादा लिहा.

....

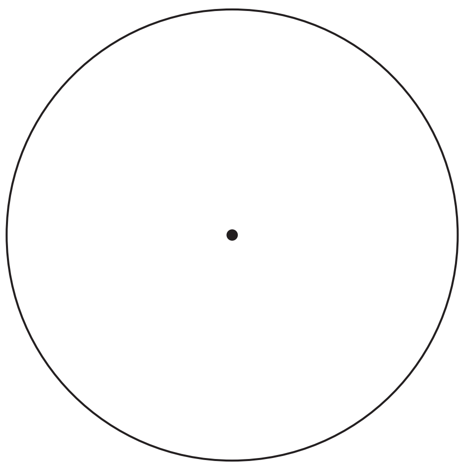
7) **खालील सारणीत एका शाळेतील एका दिवसात 15 ते 18 वर्षे वयोगटातील विद्यार्थ्यांना दिलेल्या कोविड लसीबद्दलची माहिती दिली आहे.**

वय (वर्षे)	15	16	17	18
विद्यार्थी संख्या	20	40	80	60

वरील माहितीच्या आधारे वृत्तालेख तयार करा.

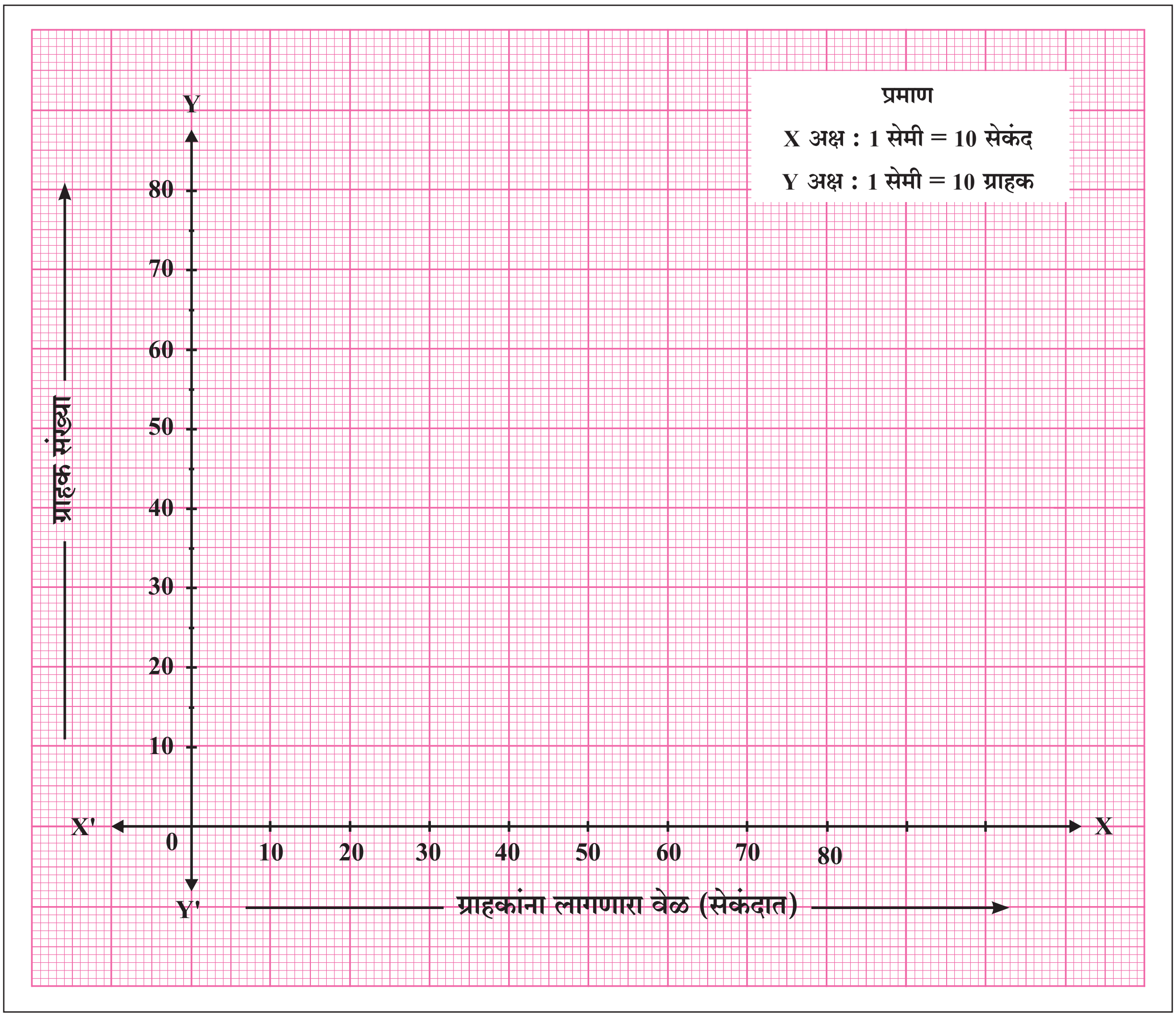
वय (वर्षे)	**विद्यार्थी संख्या**	**केंद्रीय कोनाचे माप (θ°)**
15	20	$\frac{20}{\square} \times 360^\circ = \square$
16	40	$\frac{40}{\square} \times 360^\circ = \square$
17	80	$\frac{80}{\square} \times 360^\circ = \square$
18	60	$\frac{60}{\square} \times 360^\circ = \square$
एकूण	$\square$	**360°**

वृत्तालेख



8) खालील सारणीत डिजिटल पद्धतीद्वारे विजेचे बिल भरण्यासाठी लागणाऱ्या वेळेसंबंधीची माहिती दिलेली आहे. त्यावरून आयतालेख काढा.

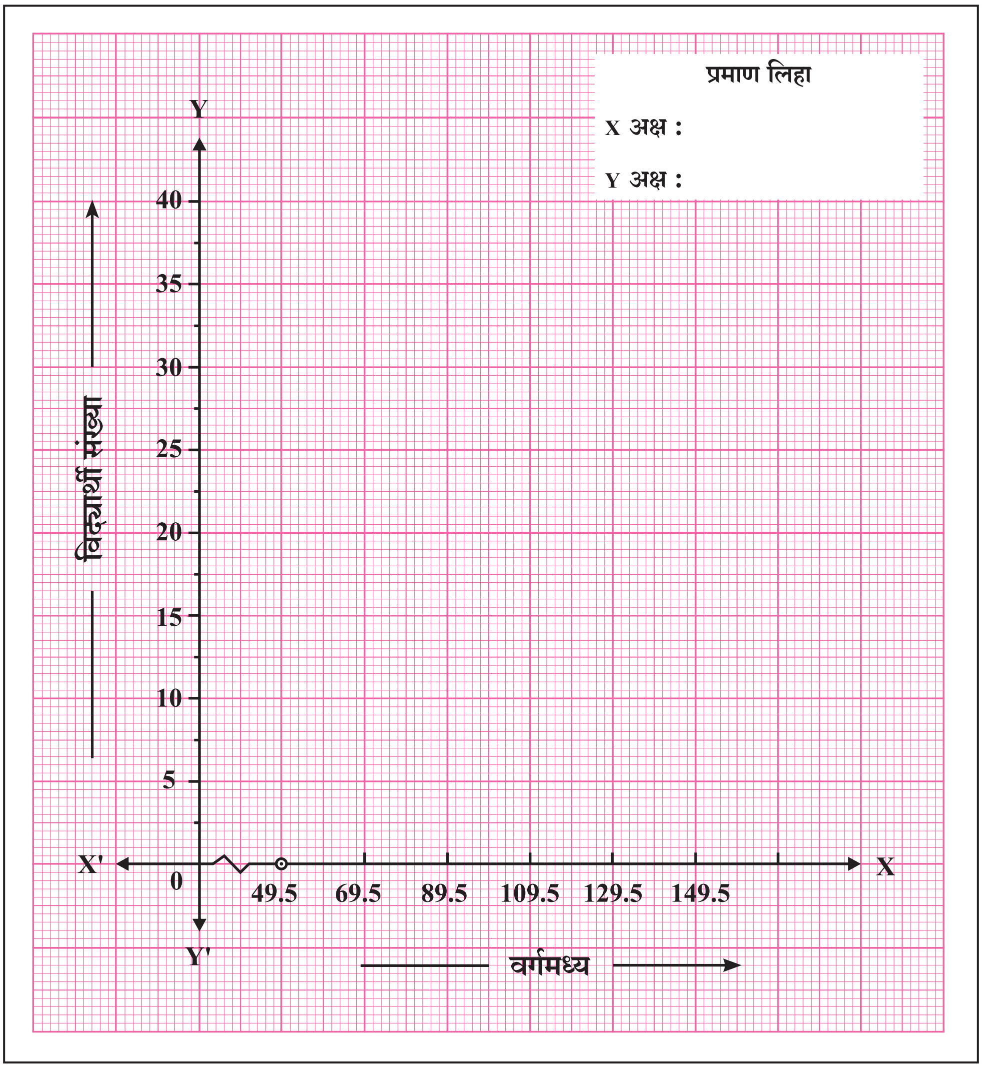
ग्राहकास लागणारा वेळ (सेकंदात)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80
ग्राहक संख्या	25	65	40	20



9) **खालील सारणीत दिलेल्या माहितीच्या आधारे वारंवारता बहुभुज काढा.**

प्राप्त गुण	60 - 79	80 - 99	100 - 119	120 - 139
विद्यार्थी संख्या	5	25	40	15

प्राप्त गुण	सलग वर्ग	वर्गमध्य	विद्यार्थी संख्या	बिंदूंचे निर्देशक
	39.5 - 59.5	49.5	0	(49.5, 0)
60 - 79	59.5 - 79.5	69.5	5	(69.5, 5)
80 - 99			25	
100 - 119			40	
120 - 139			15	
	139.5 - 159.5		0	



सरावासाठी उदाहरणे

1) खालील वारंवारता सारणीत सामग्रीचा मध्य 18 आहे, तर k ची किंमत काढा.

वर्ग	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
वारंवारता	7	6	9	13	k	5	4

2) खालील वारंवारता सारणीवरून सामग्रीचा बहुलक काढा.

वर्ग	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
वारंवारता	3	8	10	15	7	4	3

3) खालील वारंवारता सारणीत 50 कारागिरांचे दैनिक वेतन दिलेले आहे. त्यावरून वेतनाचा मध्यक काढा.

दैनिक वेतन (₹)	1000 - 1200	1200 - 1400	1400 - 1600	1600 - 1800	1800 - 2000
कारागीर संख्या	12	14	8	6	10

4) खालील सारणीत विद्यार्थ्यांची उंची दर्शविणारी माहिती दिलेली आहे. माहितीचा आयतालेख काढा. त्यावरून वारंवारता बहुभुज काढा.

उंची (सेमी)	130 - 135	135 - 140	140 - 145	145 - 150	150 - 155	155 - 160
विद्यार्थी संख्या	4	11	12	7	10	6

5) खालील सारणीवरून सामग्रीचा मध्यक काढा.

वर्ग	3 - 5	6 - 8	9 - 11	12 -14	15 - 17	18 - 20
वारंवारता	3	5	21	23	10	12

6) खालील वारंवारता सारणीत केलेल्या एकूण 50 निरीक्षणांचा मध्य 62.8 आहे, तर x आणि y च्या किमती काढा.

वर्ग	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
वारंवारता	5	x	10	y	7	8

भाग – 2

1. समरूपता

1) Δ DEF ~ Δ GHI असेल, तर त्यांच्या संगतकोनांमधील, तसेच संगतबाजूंमधील परस्परसंबंध दर्शविणारी खालील कृती पूर्ण करा.

Δ DEF ~ Δ GHI

i) समरूप त्रिकोणांचे संगतकोन एकरूप असतात.

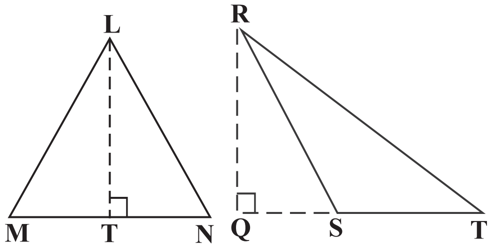
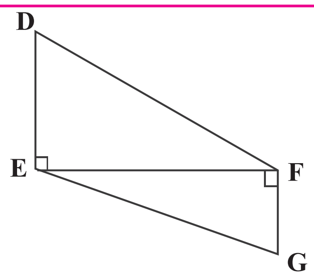
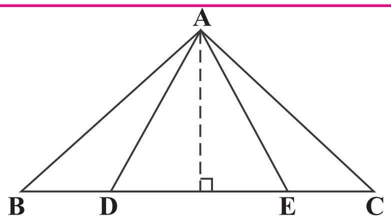
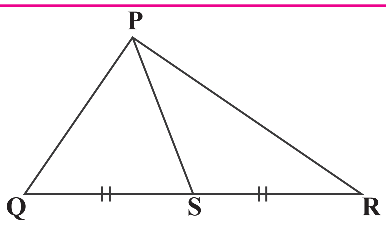
$\therefore \angle D \cong \angle G, \angle E \cong \angle \square, \angle \square \cong \angle \square$

ii) तसेच समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात.

$\therefore \frac{DE}{GH} = \frac{\square}{HI} = \frac{\square}{\square}$

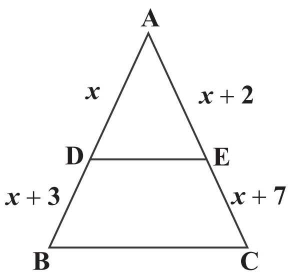
2) समरूप त्रिकोणांच्या जोडीची कच्ची परंतु प्रमाणबद्ध आकृती काढा. त्रिकोणांना नावे द्या. त्यांचे संगतकोन सारख्या खुणांनी दर्शवा. त्रिकोणाच्या प्रमाणात असलेल्या संगत बाजूंची लांबी संख्यांनी दाखवा.

3) खालील सारणीतील आकृत्यांचे निरीक्षण करा व त्यावरून त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर काढण्यासाठी चौकटी पूर्ण करा.

अ. क्र.	आकृती	कृती
1)		$\frac{A(\Delta\ LMN)}{A(\Delta\ RST)} = \frac{LT \times MN}{\square \times \square}$
2)		$\frac{A(\Delta\ DEF)}{A(\Delta\ EFG)} = \frac{\square}{\square}$ .... समान पाया असलेले त्रिकोण
3)		$\frac{A(\Delta\ ABC)}{A(\Delta\ ADE)} = \frac{\square}{\square}$ .... समान उंचीचे त्रिकोण
4)		$\frac{A(\Delta\ PQS)}{A(\Delta\ PRS)} = \frac{\square}{\square}$ .... समान पाया व समान उंचीचे त्रिकोण

4) Δ ABC मध्ये रेख DE $\parallel$ बाजू BC तर आकृतीवरून x ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

रेख DE $\parallel$ बाजू BC



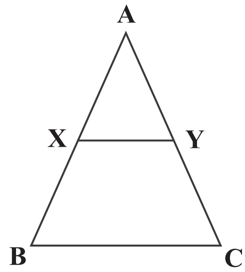
$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{\square}{EC} =$ .... ($\square$)

$\therefore \frac{x}{x+3} = \frac{\square}{x+7}$

$\therefore x(x+7) = (x+2)\ (x+3)$ $\qquad \therefore x^2 + 7x = x^2 + \square\, x + 6$

$\therefore \square\, x = 6$ $\qquad \therefore x = \square$

5) Δ ABC मध्ये AX = 2, XB = 6 आणि $\frac{AY}{AC} = \frac{1}{4}$ तर XY ही BC ला समांतर आहे की नाही हे ठरविण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



$\frac{AX}{XB} = \frac{2}{\square}$

$\therefore \frac{AX}{XB} = \frac{1}{\square}$ .... (i)

तसेच $\frac{AY}{AC} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{AC}{AY} = \frac{\square}{1}$ .... (व्यस्त क्रिया)

$\frac{AC - AY}{AY} = \frac{4 - 1}{1}$ .... (वियोग क्रिया)

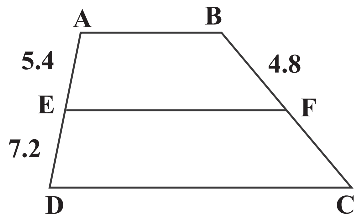
$\therefore \frac{\square}{AY} = \frac{3}{1}$

$\therefore \frac{AY}{YC} = \frac{1}{\square}$ .... (ii) (व्यस्त क्रिया)

विधान (i) व (ii) नुसार

$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$ $\therefore$ XY || BC ...... $\square$

6) समलंब □ ABCD मध्ये रेख EF || बाजू DC आकृतीवरून BC चे माप काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



AB || EF || DC

$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{\square}$ .... (तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांचा गुणधर्म)

$\therefore \frac{5.4}{7.2} = \frac{4.8}{\square}$

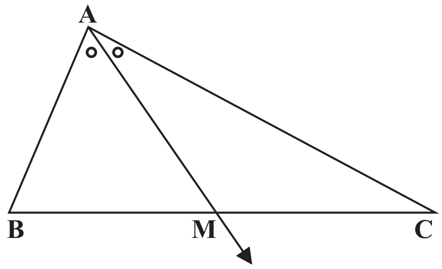
$\therefore$ FC = $\square$

आकृतीनुसार BC = $\square$ + FC .... (B - F - C)

$\therefore$ BC = 4.8 + $\square$

$\therefore$ BC = $\square$

7) सोबतच्या आकृतीमध्ये किरण AM हा $\angle$ BAC चा कोनदुभाजक आहे. जर AB = 7.5 सेमी, AC = 10 सेमी, तर A(Δ ABM) : A(Δ AMC) काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



किरण AM हा $\angle$ BAC चा कोनदुभाजक आहे.

$\therefore \dfrac{BA}{\square} = \dfrac{BM}{MC}$ .... (त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

$\therefore \dfrac{7.5}{\square} = \dfrac{BM}{MC}$

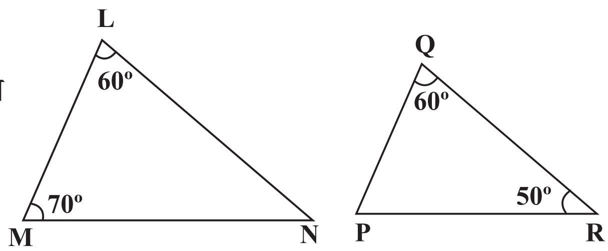
$\therefore \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{3}{\square}$ .... (i)

आता Δ ABM व Δ AMC मध्ये अनुक्रमे BM व MC हे पाया घेतल्यास

$\dfrac{A(\Delta ABM)}{A(\Delta AMC)} = \dfrac{\square}{\square}$ .... (समान उंचीचे त्रिकोण)

$\dfrac{A(\Delta ABM)}{A(\Delta AMC)} = \dfrac{3}{\square}$ .... (विधान (i) वरून)

8) शेजारील आकृतीमधील त्रिकोण समरूप आहेत की नाही हे ठरविण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.



Δ PQR मध्ये

$\angle P + \angle Q + \angle R = \square$ .... (त्रिकोणाच्या सर्व कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

$\angle P + 60^\circ + 50^\circ = \square$

$\therefore \angle P = \square$

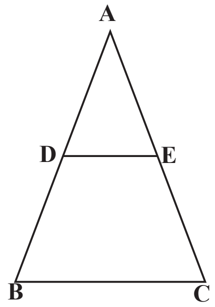
Δ LMN व Δ PQR मध्ये

$\angle \square \cong \angle Q$ ...... (प्रत्येकी 60°)

$\angle M \cong \angle \square$ ...... (प्रत्येकी 70°)

$\Delta LMN \sim \Delta \square$ ...... (कोको कसोटीनुसार)

9) **Δ ABC मध्ये रेख DE $\parallel$ बाजू BC AD : AB = 2 : 3, A(Δ ADE) = 40 चौसेमी, तर A(Δ ABC) काढण्यासाठी खालील कृती करा.**



Δ ADE व Δ ABC मध्ये, DE $\parallel$ BC

$\angle A \cong \angle$ ☐ ...... (सामाईक कोन)

$\angle ADE \cong \angle$ ☐ ...... (संगत कोन)

$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$ ...... (☐ कसोटी)

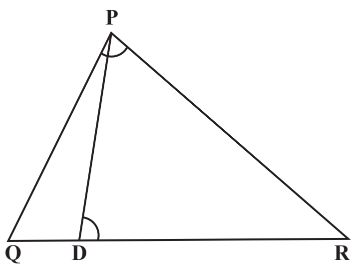
$\therefore \dfrac{A(\Delta ADE)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{AD^2}{\square}$ .... (समरूप त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

$\therefore \dfrac{40}{A(\Delta ABC)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$\therefore A(\Delta ABC) = \dfrac{40 \times 9}{\square}$

$\therefore A(\Delta ABC) =$ ☐ चौसेमी

10) **Δ PQR च्या बाजू QR वर D बिंदू असा आहे की, $\angle QPR = \angle PDR$ तर $PR^2 = QR \times DR$ हे सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



Δ PQR व Δ QPR मध्ये

$\angle QPR \cong \angle$ ☐ ...... (पक्ष)

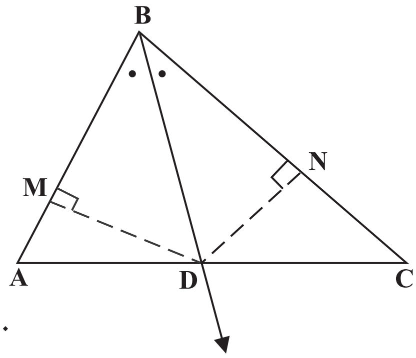
$\angle PRQ \cong \angle$ ☐ ...... (सामाईक कोन)

$\therefore \Delta PQR \sim \Delta$ ☐ ...... (☐ कसोटी)

$\therefore \dfrac{PR}{\square} = \dfrac{QR}{\square}$ ...... (समरूप त्रिकोणांच्या संगतबाजू)

$\therefore PR^2 = QR \times$ ☐

11) त्रिकोणाच्या कोनाचा दुभाजक त्या कोनासमोरील बाजूला उरलेल्या बाजूंच्या लांबींच्या गुणोत्तरात विभागतो, हे सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



पक्ष : Δ ABC मध्ये किरण BD हा $\angle$ABC चा दुभाजक आहे,

A-D-C

साध्य : $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{\square}$

रचना : रेख DM $\perp$ बाजू AB आणि रेख DN $\perp$ बाजू BC काढले.

सिद्धता : किरण BD हा $\angle$ABC चा दुभाजक आहे.

$\therefore$ रेख DM $\cong$ रेख $\square$ ...... (i) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

आता Δ ABD व Δ BDC मध्ये अनुक्रमे AB व BC हे पाया मानू.

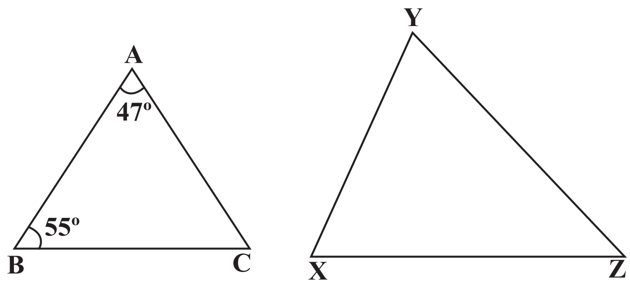
$\therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \frac{AB}{\square}$ .... (ii) (विधान (i) वरून, समान उंचीचे त्रिकोण)

तसेच Δ ABD व Δ BDC मध्ये अनुक्रमे AD व DC हे पाया मानू.

$\therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \frac{AD}{\square}$ .... (iii) (समान उंचीचे त्रिकोण)

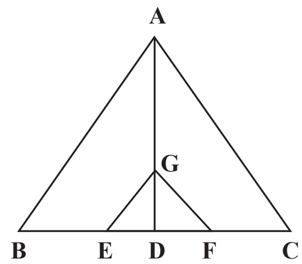
$\therefore \frac{AB}{\square} = \frac{AD}{\square}$ .... (विधान (ii) व (iii) वरून)

12) जर Δ ABC ~ Δ YXZ असेल तर, खालील आकृतीत दिलेल्या माहितीवरून $\angle$ Z चे माप काढा.



13) दोन समरूप त्रिकोणांपैकी एका त्रिकोणाच्या बाजू अनुक्रमे 12 सेमी, 15 सेमी व 18 सेमी आहेत. जर दुसऱ्या त्रिकोणाची परिमिती 27 सेमी असेल, तर त्या त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी काढा.

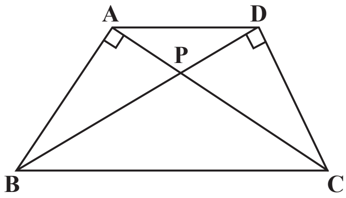
14) बिंदू G हा Δ ABC चा गुरुत्वमध्य आहे. जर AB $\parallel$ GE आणि AC $\parallel$ GF असेल तर $\dfrac{A(\Delta GEF)}{A(\Delta ABC)}$ काढा.



सरावासाठी उदाहरणे

1) एका त्रिकोणी शेताच्या बाजू 250 मी., 450 मी. व 320 मी. आहेत. या शेताचा नकाशा काढताना मोठी बाजू 9 सेमी घेतली तर इतर दोन बाजू नकाशात किती लांबीच्या घ्याव्या लागतील?

2) सोबतच्या आकृतीवरून सिद्ध करा. $AP \times PC = BP \times PD$ तसेच $AP = 4.2$, $AC = 11$, आणि $DP = 5.6$, तर BD काढा.

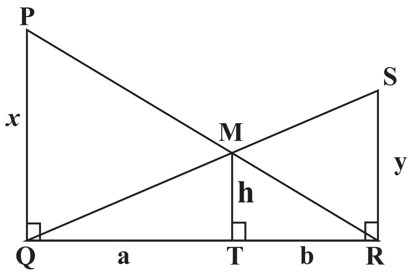


3) एका मैदानावर 6 फूट आणि 10.5 फूट उंचीचे दोन खांब सरळ उभे केलेले आहेत. मोठ्या खांबाच्या वरच्या टोकाला लावलेल्या दिव्याच्या प्रकाशामुळे लहान खांबाची सावली 8 फूट पडते, तर दोन्ही खांबामधील अंतर किती असेल?

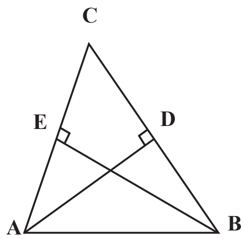
4) कोणत्याही त्रिकोणाच्या सर्व बाजूंचे मध्यबिंदू जोडून तयार होणारे त्रिकोण हे मूळ त्रिकोणाशी, तसेच परस्पराशी समरूप असतात हे सिद्ध करा.

5) x आणि y मीटर उंचीचे दोन खांब एकमेकांपासून 'P' मीटर अंतरावर आहेत. जर एका खांबाचा पाया दुसऱ्या खांबाचे वरचे टोक यांना जोडणाऱ्या तारा M बिंदूत छेदतात. जर बिंदू M चे जमिनीपासूनचे अंतर h मीटर असेल, तर सिद्ध करा की,

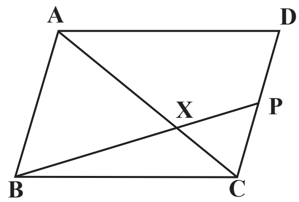
$$h = \frac{xy}{x + y}$$



6) Δ ABC मध्ये रेख AD $\perp$ बाजू BC आणि रेख BE $\perp$ बाजू AC तर $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ दाखवा.



7) □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. बिंदू P हा रेख CD चा मध्यबिंदू आहे. रेख BP ही कर्ण AC ला X मध्ये छेदते तर दाखवा की $3AX = 2AC$



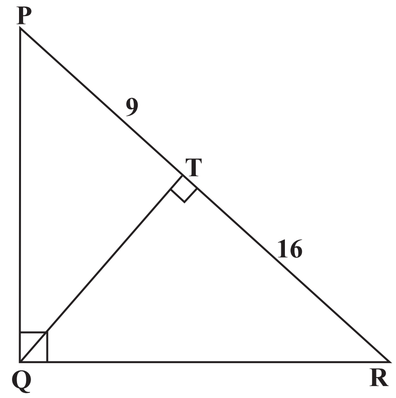
2. पायथागोरसचे प्रमेय

1) **संजूच्या घरापासून सरळ उत्तरेला 4 किमी अंतरावर राजूचे घर आहे. तसेच संजूच्या घरापासून सरळ पूर्वेला 3 किमी अंतरावर विजूचे घर आहे, तर वरील माहिती दर्शविणारी भौमितिक आकृती काढून विजू व राजू यांच्या घरातील अंतर काढा. उत्तराचे स्पष्टीकरण लिहा.**

....

....

2) **Δ PQR मध्ये, m$\angle$PQR = 90^o, रेख QT $\perp$ बाजू PR, PT = 9, RT = 16 तर QT ची किंमत काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.**



काटकोन Δ PQR मध्ये,

रेख QT $\perp$ कर्ण [ ] .... (पक्ष)

$\therefore$ भूमितीमध्याच्या प्रमेयानुसार,

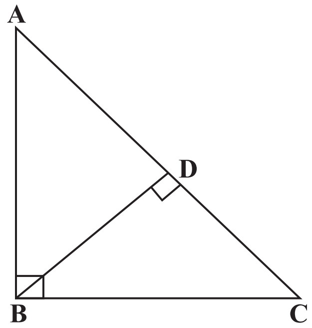
$QT^2 = PT \times$ [ ]

$\therefore QT^2 = 9 \times$ [ ]

$\therefore QT^2 =$ [ ]

$\therefore QT =$ [ ] .... (वर्गमूळ घेऊन)

3) कोणत्याही काटकोन त्रिकोणात, कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेएवढा असतो. हे सिद्ध करण्यासाठी कृती पूर्ण करा.



पक्ष : Δ ABC मध्ये $m\angle ABC =$ ☐

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : रेख BD $\perp$ बाजू AC काढला (A-D-C).

सिद्धता : $\Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ .... (☐)

$$\frac{A(\Delta ADB)}{A(\Delta ABC)} = \frac{AB^2}{AC^2} \text{ .... (I)}$$

$$\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BC^2}{AC^2} \text{ .... (II)}$$

{समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचा गुणधर्म}

A (Δ ABC) = A (Δ ADB) + ☐ .... (आकृतीवरून) .... (III)

$$\therefore 1 = \frac{A(\Delta ADB)}{A(\Delta ABC)} + \frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} \text{ ......}$$ (समी. III च्या दोन्ही बाजूंना A(Δ ABC) ने भागून) .... (IV)

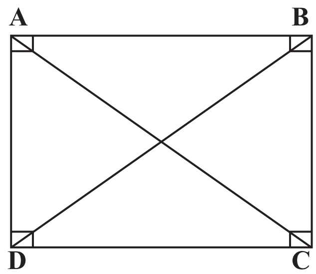
$$\therefore 1 = \frac{\square}{AC^2} + \frac{\square}{AC^2}$$ .... (I, II व IV वरून)....... (V)

$\therefore$ $\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$ .... (समी. V ला AC^2 ने गुणून)

4) काटकोन त्रिकोणात बाजूंची लांबी a, b व c आहे, तर खालील सारणी पूर्ण करा.

a	b	c	(मोठी बाजू)^2	उरलेल्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज	निष्कर्ष
3	7	4	49	25	$49 \neq 25$, $\therefore$ (3, 4, 7) हे पायथागोरसचे त्रिकूट नाही.
25	24	7			
40	9	41			
20	19	29			

5) **आयताच्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज त्यांच्या कर्णांच्या वर्गांच्या बेरजेइतकी असते, हे सिद्ध करण्यासाठी कृती पूर्ण करा.**



पक्ष : □ ABCD हा आयत आहे.

साध्य : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = \square + \square$

सिद्धता : काटकोन Δ ABC मध्ये,

$AB^2 + \square = \square$ .... (I) (पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार)

काटकोन Δ ADC मध्ये,

$\square + \square = AC^2$ .... (II) (पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार)

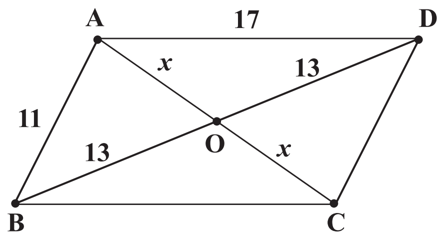
आणि AC = BD ....(III) .... ($\square$)

$AB^2 + \square + \square + \square = AC^2 + AC^2$

.... (समी. (I) व (II) ची बेरीज करून) .... (IV)

$\therefore AB^2 + \square + \square + \square = BD^2 + AC^2$ .... ((III) व (IV) वरून)

6) **समांतरभुज चौकोनामध्ये लगतच्या बाजूंपैकी एक बाजू 11 सेमी व दुसरी बाजू 17 सेमी आहे. एक कर्ण 26 सेमी असल्यास दुसरा कर्ण काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.**



आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे समांतरभुज □ABCD चे कर्ण AC व कर्ण BD परस्परांना बिंदू O मध्ये छेदतात.

समांतरभुज □ ABCD चे कर्ण परस्परांना $\square$.

$\therefore$ BO = DO = 13 सेमी , AO = CO = x मानू.

Δ ABD मध्ये रेख AO मध्यगा.

$\therefore AB^2 + AD^2 = \square + \square$ .... (अपोलोनिअसच्या प्रमेयानुसार)

$\therefore 11^2 + 17^2 = 2x^2 + 2\,(13)^2$

$\therefore \square + \square = 2x^2 + 2\,\square$

$\therefore \square = 2x^2 + \square$

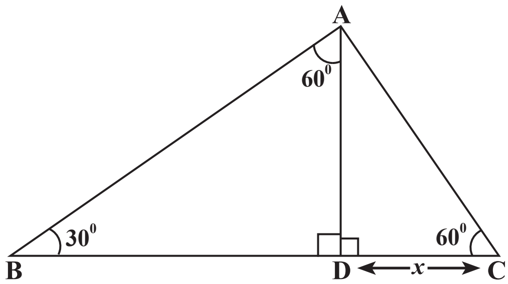
$\therefore 2x^2 = \square - \square$

$\therefore 2x^2 = \square$ $\therefore x^2 = \square$ $\therefore x = 6$

$\therefore$ कर्ण AC = $2x = 2 \times 6 = \square$ सेमी

7) Δ ABC मध्ये, $m\angle B = 30^{\circ}$, $m\angle C = 60^{\circ}$, AD $\perp$ BC, $m\angle BAD = 60^{\circ}$, तर Δ ABD व Δ ACD यांच्या परिमितीचे गुणोत्तर काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.

Δ ACD मध्ये, DC = x मानू.



$\therefore$ AC = □ .... (30°- 60°- 90° Δ गुणधर्म)

AD = □ .... (I) (60° समोरील बाजू)

$\therefore$ Δ ACD ची परिमिती = □ + □ +

= □ + □ $\sqrt{3}\,x$

= $\sqrt{3}\,x\left(\sqrt{3}+1\right)$ .... (II)

आता, Δ ABD मध्ये, AD = □ .... (I वरून)

$\therefore$ AB = □ .... (30°- 60°- 90° Δ गुणधर्म)

$\therefore$ BD = $\frac{\sqrt{3}}{2}$AB = □ .... (60° समोरील बाजू)

Δ ABD ची परिमिती = □ + □ + □

= □ + □ = (□) ...... (III)

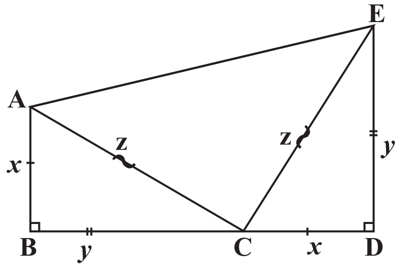
$\frac{\Delta \text{ ABD ची परिमिती}}{\Delta \text{ ACD ची परिमिती}}$ = $\frac{□}{□}$ .... समीकरण (II आणि III वरून)

= □

सरावासाठी उदाहरणे

1) केंद्रबिंदू O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास BC आहे. जीवा AB = 9 सेमी, जीवा AC = 12 सेमी तर वर्तुळाची त्रिज्या किती ?

2) आकृतीमध्ये तीन त्रिकोण मिळून एक समलंब चौकोन तयार केला आहे. दिलेली माहिती वापरून $\angle ACE$ चे माप काढा व तीन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज = समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ. याचा वापर करून पायथागोरसचे प्रमेय सिद्ध करा.

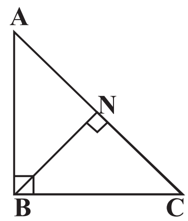


3) एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण 10 सेमी असून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 24 चौसेमी आहे, तर त्याची परिमिती किती ?

4) एका झाडावर 5 मीटर उंचीवर एक माकड बसले आहे. त्या झाडापासून 10 मीटर अंतरावर असलेले फळ घेण्यासाठी ते माकड झाडावरून खाली उतरून बुंध्यापासून सरळ फळाकडे गेले. त्या ऐवजी ते झाडाच्या शेंड्यावर जाऊन जर त्याने तेथून त्या फळावर उडी मारली असती, तर त्याने दुसऱ्या वेळी कापलेले अंतर पहिल्या वेळी कापलेल्या एकूण अंतराएवढेच भरते, तर झाडाची उंची ठरवा.

5) ΔABC हा काटकोन त्रिकोण आहे. $\angle ABC = 90^{\circ}$ व $BN \perp$ बाजू AC.

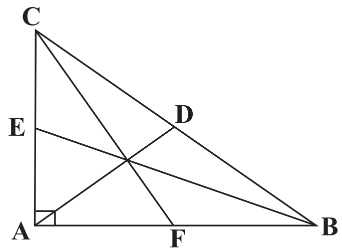
$BC = y$, $A(\Delta ABC) = x$ तर सिद्ध करा $BN = \dfrac{2xy}{\sqrt{y^4 + 4x^2}}$



6) ΔPQR मध्ये $\angle Q = 90^{\circ}$, $PQ = r, QR = p, PR = q$. Q मधून बाजू PR वर काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी m असेल तर सिद्ध करा की, $\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{1}{m^2}$

7) काटकोन ΔABC मध्ये $\angle A = 90^{\circ}$, AD, BE आणि CF मध्यगा आहेत तर सिद्ध करा की,

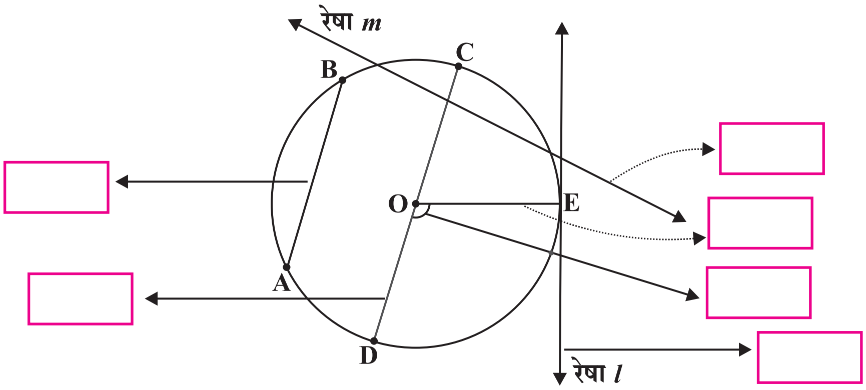
$2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3BC^2$



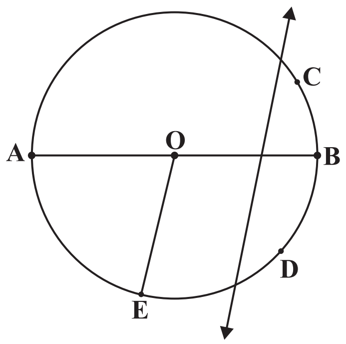
8) समांतरभुज □ABCD मध्ये लहान कर्ण BD हा बाजू AB व बाजू CD ला लंब आहे, तर सिद्ध करा की, $AC^2 - BD^2 = 4AB^2$

3. वर्तुळ

1) खालील आकृतीमध्ये O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू असून आकृतीचे निरीक्षण करून वर्तुळाच्या भागांना योग्य ती नावे द्या.



2) आकृतीवरून पुढील चौकटी पूर्ण करा.



1) वर्तुळकंसांची नावे लिहा. ☐ ☐ ☐

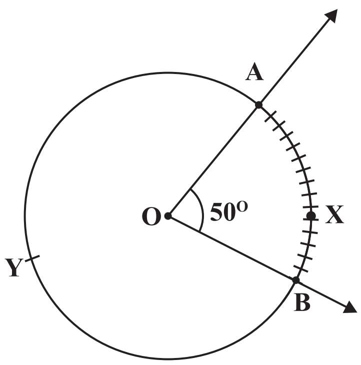
2) लघुकंसांची नावे लिहा. ☐ ☐

3) अर्धवर्तुळ कंसांची नावे लिहा. ☐ ☐

4) $m\angle BOE = m$ (कंस ☐)

5) विशालकंसांची नावे लिहा. ☐ ☐

3) आकृतीवरून पुढील कृती पूर्ण करा.



आकृतीमध्ये O हा वर्तुळकेंद्र असून $\angle AOB$ हा केंद्रीय कोन आहे.

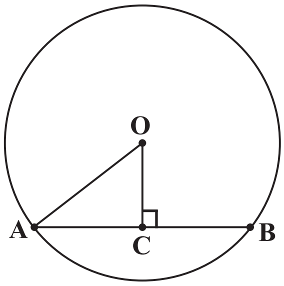
m (कंस AXB) = $m\angle$........

$\therefore$ m (कंस AXB) = ☐ $^{\circ}$

m (कंस AYB) = 360° − ☐

= ☐

4) **वर्तुळकेंद्र O पासून जीवा AB चे अंतर 8 सेमी आहे. जीवा AB ची लांबी 12 सेमी आहे. तर वर्तुळाचा व्यास काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



l(OC) = 8 सेमी $\quad$ l(AB) = 12 सेमी

OC ⊥ AB $\quad$ ∴ l(AC) = l(BC) = ☐

Δ OCA मध्ये पायथागोरस प्रमेयानुसार

$l(AO)^2$ = ☐ + ☐

= ☐ + ☐

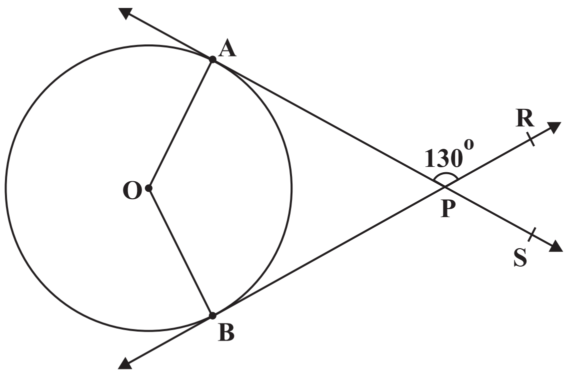
= ☐

l(AO) = ☐

∴ वर्तुळाचा व्यास = 2 × ☐

= ☐ सेमी

5) **आकृतीमध्ये बिंदू A व B मधून अनुक्रमे रेषा AP व रेषा BP या वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढल्या आहेत. O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे. ∠APR= 130° असेल, तर केंद्रीय कोन ∠AOB चे माप काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



आकृतीवरून...

∠APR + ☐ = 180° (रेषीय जोडीतील कोन)

∴ 130° + ☐ = 180°

∴ ∠APB = ☐

रेषा AP व रेषा BP या वर्तुळाच्या स्पर्शिका आहेत.

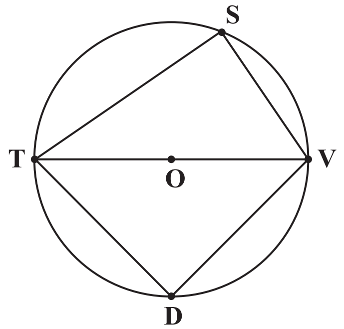
∴ ∠OAP = ∠OBP = 90°

☐AOBP मध्ये, ∠APB + ∠OAP + ∠OBP + ∠AOB = ☐ ...... (चौकोनाचे कोन)

∴ ☐ + 90° + 90° + ∠AOB = ☐

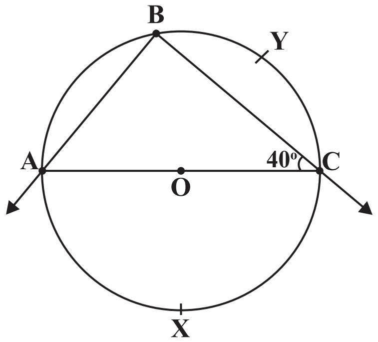
∴ ∠AOB = ☐

6) **'O' केंद्रित वर्तुळाचा TV व्यास आहे, तर आकृतीवरून खालील कृती पूर्ण करा.**



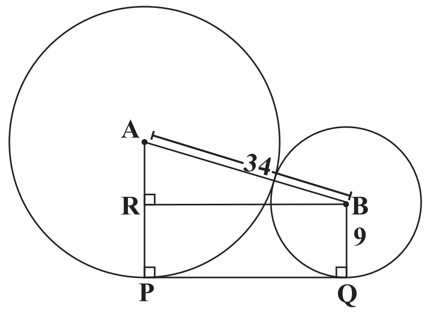
1) $m\angle TSV =$ ______
2) $m\angle TDV =$ ______
3) $m\angle TSV + m\angle TDV =$ ______
4) □ TDVS ______ चौकोन आहे.

7) **सोबतच्या आकृतीत कंस AXC अर्धवर्तुळ आहे. $m\angle BCA = 40^\circ$ असेल, तर खालील कृती पूर्ण करा.**



1) $m\angle ABC =$ ______
2) $m\angle BAC =$ ______
3) m(कंस AXC) = ______
4) m(कंस BYC) = ______

8) **25 सेमी आणि 9 सेमी त्रिज्या असणारी दोन वर्तुळे एकमेकांना बाहेरून स्पर्श करतात. त्यांच्या केंद्रबिंदूमधील अंतर 34 सेमी असेल, तर त्या दोन्ही वर्तुळांच्या स्पर्शिकाखंडाची लांबी काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



आकृतीवरून AP = 25, BQ = 9 आणि AB = ______

BR ⊥ AP, AP ⊥ PQ, BQ ⊥ PQ

∴ □ BQPR हा ______ आहे.

∴ PR = ______

∴ AR = AP − PR

∴ AR = ______

Δ ARB मध्ये

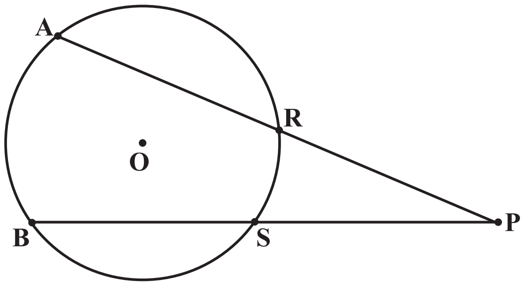
$AR^2 + BR^2 =$ ______ .... (पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार)

∴ ______ + $BR^2 = 34^2$

∴ $BR^2 =$ ______ ∴ BR = ______

∴ BR = PQ = ______

9) **आकृतीमध्ये वर्तुळाचे केंद्र O आहे. AP = 12 सेमी, RP = 4 सेमी, PS = 6 सेमी, तर BS ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**



AP = 12 सेमी, RP = 4 सेमी, PS = 6 सेमी

AP × ☐ = BP × ☐ (जीवांच्या बाह्यछेदनाचे प्रमेय)

∴ 12 × ☐ = BP × ☐

$\therefore BP = \dfrac{12 \times \square}{\square}$

∴ BP = ☐

∴ BP = BS + ☐ (B – S – P)

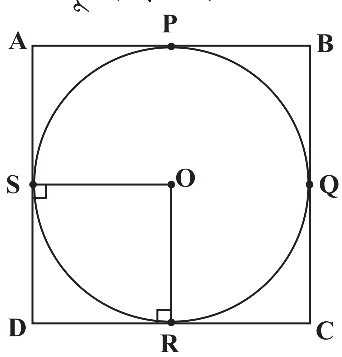
∴ 8 = BS + ☐

∴ BS = ☐

10) **पक्ष : □ ABCD मध्ये एक अंतर्वर्तुळ चौकोनाच्या बाजूंना P, Q, R, S या बिंदूत स्पर्श करते.**

साध्य : ∠SOR + ∠RDS = 180°

हे सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



रचना : आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेख OS, रेख OR काढा.

त्रिज्या OS ⊥ ☐
त्रिज्या OR ⊥ ☐ } स्पर्शिका त्रिज्या लंबता गुणधर्म

∴ ∠OSD = ∠ORD = ☐°

∴ ∠OSD + ∠ORD = ☐°

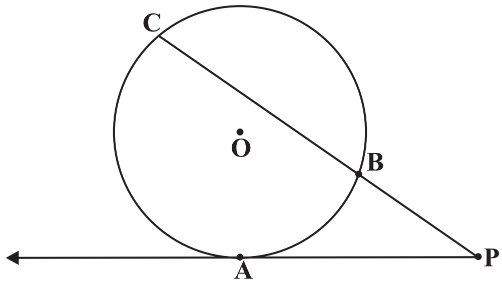
□ OSDR मध्ये

∠SOR + ∠RDS + ∠ORD + ∠OSD = ☐°

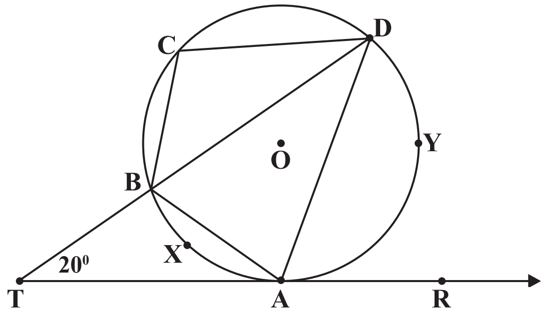
∴ ∠SOR + ∠RDS + ☐° + ☐° = ☐°

∴ ∠SOR + ∠RDS = ☐° .... सिद्ध झाले.

11) आकृतीत, वर्तुळाचे केंद्र O आहे. PA ही वर्तुळाची स्पर्शिका आणि PC ही छेदिका आहे. P-B-C (.....) असून PA = 6 असून BC ची लांबी PB पेक्षा 6 ने अधिक असेल, तर PC काढा.

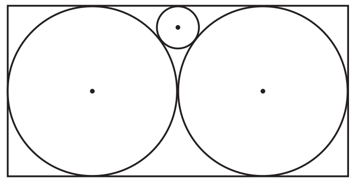


12) आकृतीमध्ये O केंद्रित वर्तुळाची रेषा TAR ही स्पर्शिका आहे. A हा स्पर्शबिंदू आहे. $\angle BTA = 20^{o}$, $\angle BAT = 28^{o}$, तर i) $\angle DAR$ व ii) $\angle BCD$ चे माप काढा.

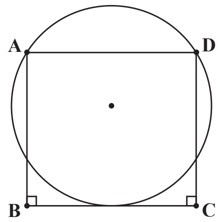


सरावासाठी उदाहरणे

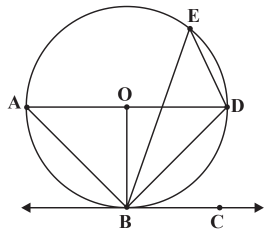
1) सोबतच्या आकृतीमध्ये 1 एकक त्रिज्या असलेली दोन वर्तुळे 2 एकक रुंदी व 4 एकक लांबी असलेल्या आयतामध्ये एकमेकांना व आयताच्या बाजूंना स्पर्श करतात. लहान वर्तुळ हे दोन्ही वर्तुळांना व आयताच्या बाजूला स्पर्श करीत आहे, तर लहान वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



2) 20 सेमी बाजू असलेल्या चौरसाच्या दोन शिरोबिंदूतून जाणारे व एका बाजूला स्पर्श करणारे वर्तुळ काढले आहे, तर त्या वर्तुळाच्या व्यासाची लांबी काढा.

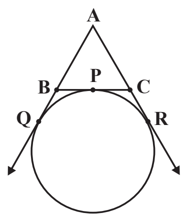


3) आकृतीत O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा AD हा व्यास आहे. वर्तुळावरील B बिंदूतून ही स्पर्शिका काढली आहे. AD || BC आणि $\angle CBD = 32^\circ$, तर i) $\angle OBD$ ii) $\angle AOB$ iii) $\angle BED$ चे माप काढा.

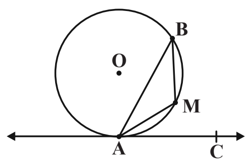


4) जर समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व भुजा अंतर्वर्तुळाला स्पर्श करीत असतील, तर तो समभुज चौकोन असतो हे सिद्ध करा.

5) आकृतीमध्ये एक वर्तुळ ΔABC च्या बाजू BC ला बिंदू P मध्ये स्पर्श करते तसेच किरण AB व AC यांना अनुक्रमे बिंदू Q व R मध्ये स्पर्श करते, तर सिद्ध करा की, $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC ची परिमिती)

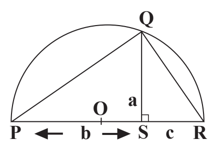


6) आकृतीमध्ये रेषा AC ही O वर्तुळकेंद्र असलेल्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. वर्तुळावरील बिंदू A हा स्पर्शबिंदू आहे. जर $m\angle BAC = 70^\circ$ तर $m\angle AMB$ काढा.



7) वर्तुळात अंतर्लिखित □ ABCD समांतरभुज चौकोन आहे सिद्ध करा की, (m कंस ABC) = (m कंस ADC)

8) आकृतीत कंस PQR हे अर्धवर्तुळ असून बिंदू O केंद्रबिंदू आहे. रेख QS ⊥ रेख PR QS = a, PS = b, SR = c तर $a^2 = bc$ दाखवा.



4. भौमितिक रचना

1) रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढण्यासाठी खालील कृती करा.

1) रेषाखंड AB काढा.
2) रेषाखंड AB च्या अंत्यबिंदूतून रेषाखंडाच्या दोन्ही बाजूस छेदणारे कंस काढा. छेदनबिंदूना P व Q असे नाव द्या.
3) बिंदू P व Q मधून जाणारी रेषा काढा.
4) रेषा PQ व रेख AB च्या छेदनबिंदूस 'O' नाव द्या.
5) रेख AB ला रेषा PQ लंब आहे हे आकृतीत चिन्हाने दर्शवा.

2) दिलेल्या कोनाशी एकरूप असणारा कोन काढण्यासाठी खालील कृती करा.

1) कोणत्याही मापाचा $\angle ABC$ काढा.
2) किरण QR काढा.
3) $\angle ABC$ च्या शिरोबिंदू 'B' वर कंपास ठेवून त्याच्या दोन्ही बाजूंना छेदणारा एक कंस काढा.
4) शिरोबिंदू B वर केलेली कृती किरण QR च्या बिंदू Q वर करा.
5) $\angle ABC$ च्या दोन्ही भुजांवरील काढलेल्या कंसामधील अंतर कंपासच्या साहाय्याने घेऊन किरण QR वरील छेदणाऱ्या कंसावर ठेवून वरच्या बाजूला छेदणारा कंस काढा.
6) बिंदू Q व छेदनबिंदू P मधून जाणारा किरण काढा. $\angle PQR$ तयार होईल.
7) दोन्ही कोनांची मापे मोजा.
8) $\angle ABC \cong \angle PQR$ असल्याची खात्री करा.

3) **वर्तुळावरील बिंदूतून त्याच वर्तुळाला स्पर्शिका काढण्यासाठी खाली दिलेल्या सूचनांनुसार कृती करा.**

केंद्र P असलेले 3.2 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा.

↓

वर्तुळावरील कोणत्याही एका बिंदूला M नाव द्या.

↓

किरण PM काढा.

↓

बिंदू M मधून किरण PM ला लंबरेषा *l* कंपासच्या साहाय्याने काढा.

4) **O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 3.4 सेमी आहे. वर्तुळकेंद्रापासून 5.5 सेमी अंतरावर असणाऱ्या P बिंदूतून वर्तुळाला स्पर्शिका काढण्यासाठी खालील कृती करा.**

केंद्र O असलेले 3.4 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा.

↓

वर्तुळकेंद्रापासून 5.5 सेमी अंतरावर बिंदू P घ्या.

↓

रेख OP चा लंबदुभाजक काढा व मध्यबिंदूला M नाव द्या.

↓

केंद्र M व त्रिज्या OM घेऊन वर्तुळाला दोन बिंदूत छेदणारा वर्तुळकंस काढा.

↓

हा वर्तुळकंस वर्तुळाला जेथे छेदतो त्याठिकाणी A व B अशी नावे द्या.

↓

रेषा PA व रेषा PB काढा. वर्तुळाच्या या अपेक्षित स्पर्शिका आहेत.

5) Δ ABC मध्ये $\angle$B हा काटकोन असून AB = 3 सेमी, BC = 4 सेमी आहे. तर Δ ABC काढा. Δ ABC शी समरूप असणारा Δ PQR असा काढा की, त्याच्या बाजू Δ ABC च्या संगत बाजूंच्या $\frac{7}{5}$ पट असतील.

6) $\Delta ABC \sim \Delta XBY$, ΔABC मध्ये AB = 6 सेमी, BC = 5 सेमी, $\angle ABC = 60^\circ$ आणि $\frac{AB}{XB} = \frac{2}{3}$ तर ΔABC व ΔXBY काढा.

सरावासाठी उदाहरणे

1) 3 सेमी त्रिज्या असलेली व एकमेकांना बाहेरून स्पर्श करणारी तीन वर्तुळे काढा. तिन्ही वर्तुळाचे केंद्रबिंदू जोडून जो त्रिकोण तयार होतो, त्याचा प्रकार लिहा.

2) 2 सेमी त्रिज्येचे O केंद्र असलेले एक वर्तुळ काढा. वर्तुळाच्या बाहेर P बिंदू घ्या आणि त्या बिंदूतून $\sqrt{12}$ सेमी लांबीच्या एक स्पर्शिकाखंड वर्तुळाला काढा.

3) 65° मापाचा $\angle ABC$ काढा. त्या कोनाचा किरण BM हा दुभाजक काढा. किरण BM वर P बिंदू असा घ्या की, BP = 4 सेमी, बिंदू P मधून BC या भुजेवर लंब टाका. या लंबाइतकी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. त्या वर्तुळाची त्रिज्या मोजून लिहा. काढलेल्या आकृतीचे निरीक्षण करून कोनाच्या भुजा व वर्तुळ यांच्यातील संबंध लिहा.

4) O केंद्र असलेले त्रिज्या 3.4 सेमी त्रिज्येच एक वर्तुळ काढा. वर्तुळावर एक बिंदू M घ्या. M बिंदूतून वर्तुळ केंद्राचा उपयोग न करता वर्तुळाची स्पर्शिका काढा.

5) रेख PQ = 7 सेमी काढा. रेख PQ वर बिंदू T असा घ्या की, PT = 3 सेमी, बिंदू P आणि T केंद्र मानून 4 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळे काढा. वर्तुळाबाहेरील बिंदू Q मधून वर्तुळाच्या स्पर्शिकांची रचना करा.

5. निर्देशक भूमिती

1) खालील तक्ता पूर्ण करा.

(दिलेल्या स्थानातील कोणत्याही एका बिंदूचे निर्देशक लिहा.)

अ.क्र.	बिंदूचे स्थान (चरण/अक्ष)	बिंदूचे निर्देशक
1)	चरण IV	(4, –7.5)
2)	चरण II	
3)	x - अक्ष	
4)	चरण I	
5)	y - अक्ष	
6)	चरण III	
7)	आरंभबिंदू	

2) i) y - अक्षाला समांतर व y - अक्षापासून 3 एकक अंतरावर असलेल्या रेषांची समीकरणे लिहा.

a) ....

b) ....

ii) x - अक्षाला समांतर असणाऱ्या व (– 4, 6) या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण लिहा.

....

3) कृती पूर्ण करा : P (2, 3) या बिंदूचे X - अक्षापासूनचे अंतर किती असेल?

बिंदूचा x - निर्देशक म्हणजे त्या बिंदूचे Y - अक्षापासूनचे लंबांतर होय.

त्याचप्रमाणे बिंदूचा y - निर्देशक म्हणजे बिंदूचे [ ] अक्षापासूनचे लंबांतर होय.

P (2, 3) या बिंदूचा x - निर्देशक = [ ]

आणि y - निर्देशक = [ ]

P (2, 3) या बिंदूचे X - अक्षापासूनचे अंतर [ ] एकक आहे.

4) P (7, 6) आणि Q (– 5, 3) असून रेख PQ ही O केंद्र असणाऱ्या वर्तुळाचा व्यास आहे. तर बिंदू O चे निर्देशक शोधण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

रेख PQ ही O केंद्र असणाऱ्या वर्तुळाचा व्यास आहे. वर्तुळकेंद्र हा व्यासाचा मध्यबिंदू असतो, म्हणजेच बिंदू O हा रेख PQ चा मध्यबिंदू आहे.

दिलेल्या उदाहरणात, $P(x_1, y_1) = P(7, 6)$ आणि $Q(x_2, y_2) = Q(-5, 3)$, बिंदू O चे निर्देशक (x, y) मानू.

$\therefore$ मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$x = \dfrac{\square + \square}{\square}$ आणि $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$\therefore x = \dfrac{7 + (-5)}{2}$

$\therefore x = \dfrac{7 - 5}{2}$

$\therefore x = \dfrac{2}{2}$

$\therefore x = \square$

$\therefore y = \dfrac{6 + \square}{2}$

$\therefore y = \dfrac{9}{2}$

$\therefore y = \square$

$\therefore$ केंद्रबिंदू O चे निर्देशक $(\square, \square)$ आहेत.

5) P(0 , 2) आणि Q(0 , – 4) या बिंदूपासून समदूर असणाऱ्या y - अक्षावरील बिंदूचे निर्देशक शोधा.

y - अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा $\square$ निर्देशक शून्य असतो.

A(0, y) हा बिंदू P(0 , 2) आणि Q(0 , – 4) या बिंदूपासून समदूर आहे असे मानू.

P(0, 2) Q(0, – 4) आणि A(0, y) या बिंदूचे $\square$ निर्देशक शून्य आहेत; म्हणजेच हे सर्व बिंदू y - अक्षावर आहेत. तसेच बिंदू A हा बिंदू P आणि Q पासून समदूर आहे. म्हणजेच P–A–Q असून बिंदू A हा रेख PQ चा मध्यबिंदू आहे. मध्यबिंदू A चा x निर्देशक शून्य आहे.

$\therefore$ मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$\therefore y = \dfrac{2 + (\square)}{2}$

$\therefore y = \dfrac{2 - \square}{2}$

$\therefore y = \dfrac{-2}{2}$ $\quad \therefore y = \square$

$\therefore$ P व Q पासून समदूर असलेल्या बिंदूचे निर्देशक $(\square, \square)$ आहेत.

6) जर P(x, y) हा बिंदू A(5, 1) आणि B(–1, 5) या बिंदूपासून समदूर असेल तर x आणि y यांमधील संबंध शोधा.

P(x, y) हा बिंदू A(5, 1) आणि B(–1, 5) या बिंदूपासून समदूर आहे.

$\therefore$ PA = PB

$\therefore$ $PA^2 = PB^2$ .... (वर्ग करून)

अंतराच्या सूत्रानुसार

$\left(\square - x\right)^2 + (1 - y)^2 = \left(\square - x\right)^2 \ (5 - y)^2$

$\therefore$ $25 - 10x + x^2 + \square = 1 + 2x + x^2 + \square$

$\therefore$ $26 - 10x - 2y = \square + 2x - 10y$

$\therefore$ $10y - 2y = 2x + \square$

$\therefore$ $8y = 12x$

$\therefore$ $\square = 3x$ ...... ($\square$ ने भागून)

$\therefore$ $3x - 2y = 0$

7) एका त्रिकोणाच्या तीनही शिरोबिंदूचे निर्देशक अनुक्रमे (0, 4), (– 2, 0) आणि (p, 2) असून त्याच्या मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक (2, 2) असल्यास p ची किंमत शोधा.

दिलेल्या उदाहरणात त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूचे निर्देशक $(x_1, y_1) = (0, 4)$, $(x_2, y_2) = (-2, 0)$ आणि (x_3, y_3) आहेत असे मानू $\therefore$ $(x_3, y_3) = (p, 2)$ दिले आहे.

मध्यगासंपातबिंदूच्या सूत्रानुसार

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$\therefore \ (2, 2) = \left(\frac{0 - 2 + \square}{3}, \frac{4 + 0 + 2}{3}\right)$$

$$\therefore \ (2, 2) = \left(\frac{p - \square}{3}, \frac{6}{3}\right)$$

x - निर्देशकांची तुलना करून

$$\frac{p - 2}{3} = \square$$

$\therefore$ $p - 2 = \square$

$\therefore$ $p = \square$

8) A (2, – 1) आणि B (5, *k*) या बिंदूना जोडणाऱ्या रेषेचा चढ $\frac{2}{3}$ असल्यास *k* ची किंमत शोधा.

दिलेल्या उदाहरणात $A(x_1, y_1) = A(2, -1)$

$B(x_2, y_2) = B(5, k)$ मानू

रेषा AB चा चढ = $\square$ .... दिलेले आहे.

रेषा AB चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .... सूत्र

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{k - (\square)}{5 - 2}$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{k + \square}{3}$$

$$\therefore \frac{\square \times 3}{3} = k + 1$$

$$\therefore 2 = k + 1$$

$$\therefore k = \square - 1$$

$$\therefore k = \square$$

9) A (– 5, 7) आणि B (1, 15) या बिंदूंमधील अंतर काढण्यासाठी कृती पूर्ण करा.

$A \equiv (-5, 7) \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (1, 15) \equiv (x_2, y_2)$ मानू

अंतराच्या सूत्रानुसार, $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - \square)^2 + (y_2 - \square)^2}$

$$= \sqrt{(1 - \square)^2 + (15 - \square)^2}$$

$$= \sqrt{\square^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{\square}$$

$d(A, B) = \square$ एकक

10) जर P (– 2, – 2) आणि Q (2, – 4) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला बिंदू A अशा प्रकारे विभाजन करतो की, PA = $\frac{3}{7}$ QA, तर बिंदू A चे निर्देशक काढा.

सरावासाठी उदाहरणे

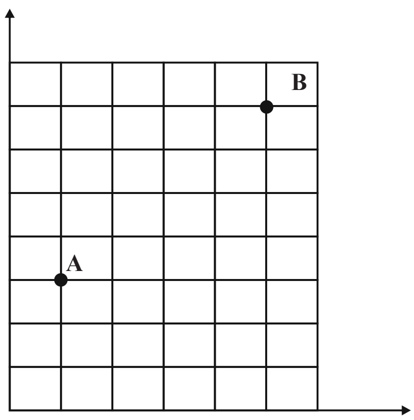
1) $\left(\frac{24}{11}, y\right)$ हा बिंदू P (2, – 2) आणि Q (3, 7) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडास कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो? तसेच y ची किंमत काढा.

2) A(–5, 6), B(–4, 2), C (7, 5) हे शिरोबिंदू असणाऱ्या त्रिकोणाचा कोणता ते काढा.

3) P(1, –1), Q(5, –1) आणि R(1, –4) हे शिरोबिंदू असणाऱ्या त्रिकोणाचा प्रकार ओळखा तसेच Δ PQR चे क्षेत्रफळ काढा.

4) (–2, –1), (1, –3) (5, 1) आणि (2, 3) या बिंदूना जोडून तयार होणारा चौकोन समांतरभुज चौकोन आहे, हे सिद्ध करा.

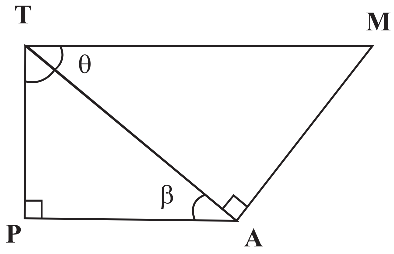
5) एका शेतात फळझाडांची लागवड करण्यासाठी समान अंतरावर 1 मी $\times$ 1 मी मापाचे खड्डे खणले आहेत. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे अथर्व A या ठिकाणच्या, तर ईश्वरी B या ठिकाणच्या खड्ड्यांमध्ये फळझाडे लावत आहेत, तर अथर्व व ईश्वरी एकमेकांपासून किती अंतरावर आहेत?



6. त्रिकोणमिती

1) शेजारील आकृतीचे निरीक्षण करून तक्ता पूर्ण करा.

अ.क्र.	त्रिकोणमितीय गुणोत्तर	गुणोत्तर
1)	$\sin \beta$	$\frac{TP}{TA}$
2)	$\cos \beta$	
3)	$\tan \beta$	
4)	$\sin \theta$	
5)	$\cos \theta$	
6)	$\text{cosec}\, \theta$	
7)	$\cot \theta$	
8)	$\sec \theta$	
9)	$\tan \theta$	



2) वरील आकृतीवरून, खालील गुणोत्तरांमधील संबंध काढा.

a) $\sin \beta$, $\text{cosec}\, \beta$

b) $\cos \beta$, $\sec \beta$

c) $\tan \theta$, $\cot \theta$

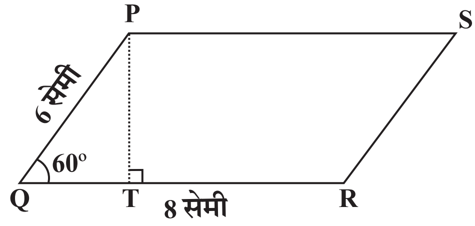
d) $\sin \theta$, $\tan \theta$, $\cos \theta$

3) खाली दिलेल्या माहितीच्या आधारे भौमितिक आकृत्या काढा. आकृतीचे वर्णन लिहा.

अ) अमोलने त्याच्या घराच्या दारातून घरासमोरील झाडाच्या शेंड्यावर बसलेल्या पक्ष्याकडे पाहिले असता 60° मापाचा उन्नत कोन तयार होतो. मात्र पक्ष्याने त्या घराच्या जमिनीपासून 4 मी उंचीवर असलेल्या छताकडे पाहिले असता 45° मापाचा अवनत कोन तयार होतो.

ब) मंदारने एका तळ्यातील नावेतून आकाशात असणाऱ्या ढगाकडे पाहिले असता 45° मापाचा उन्नत कोन व ढगाच्या पाण्यातील प्रतिमेकडे पाहिले असता 45° मापाचा अवनत कोन तयार होतो.

4) दिलेल्या आकृतीतील माहितीवरून, समांतरभुज □ PQRS ची उंची आणि क्षेत्रफळ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



रचना : रेख PT ⊥ बाजू QR काढा.

काटकोन ΔPQT मध्ये

$$\sin\theta = \frac{\square}{PQ}$$

$$\therefore \sin 60^0 = \frac{PT}{6}$$

$$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{PT}{6}$$ .... (sin 60° ची किंमत ठेवून)

$$PT = \frac{\sqrt{3}\,\square}{2}$$

$$\therefore PT = \square$$ सेमी

A(□PQRS) = पाया × उंची

= QR × □

= 8 × □

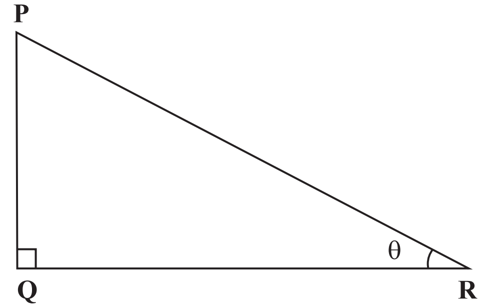
= □ चौसेमी

5) दिलेल्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरावरून विचारलेले त्रिकोणातील गुणोत्तर शोधण्यासाठी कोणत्या त्रिकोणमितीय नित्यसमानतेचा वापर कराल ते लिहून खालील सारणी पूर्ण करा.

अ. क्र.	दिलेले गुणोत्तर	शोधावयाचे गुणोत्तर	वापरावयाची त्रिकोणमितीय नित्यसमानता
1)	sec θ	tan θ	....
2)	cot θ	cosec θ	....
3)	cos θ	sin θ	....

6) **जर $\tan\theta = \frac{9}{40}$ तर $\sin\theta$ व $\cos\theta$ च्या किमती शोधण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.**

पद्धत – 1



आकृतीवरून :

$$\tan\angle R = \frac{\angle R \text{ समोरील बाजू}}{\square}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{PQ}{QR} \quad \text{.......... (i)}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{9}{40} \quad \text{.......... (ii) (पक्ष)}$$

समी (i) व (ii) वरून

$PQ = 9k$ मानू. .... (k स्थिरांक)

$QR = \square$

काटकोन ΔPQR मध्ये पायथागोरस सिद्धांतानुसार,

$$\square = PQ^2 + QR^2$$

$$\therefore PR^2 = (9k)^2 + \square$$

$$\therefore PR^2 = 81k^2 + 1600k^2$$

$$\therefore PR^2 = 1681k^2$$

$\therefore PR = \square$ .... वर्गमूळ घेऊन

$$\therefore \sin\theta = \frac{PQ}{\square} = \frac{\square}{41k} = \frac{\square}{\square}$$

$$\cos\theta = \frac{\square}{\square} = \frac{40k}{41k} = \frac{\square}{\square}$$

पद्धत – 2

$1 + \tan^2\theta = \square$ .... त्रिकोणमितीय नित्यसमानता

$\therefore 1 + \left(\frac{9}{40}\right)^2 = \sec^2\theta$ .... दिलेल्या गुणोत्तराची किंमत ठेवून

$$\therefore 1 + \frac{\square}{\square} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \frac{1600 + 81}{1600} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \frac{1681}{1600} = \sec^2\theta$$

$\therefore \sec\theta = \frac{\square}{\square}$ .... वर्गमूळ घेऊन

परंतु $\cos\theta \times \square = 1$ .... सूत्र

$\therefore \cos\theta \times \frac{41}{40} = 1$

$\therefore \cos\theta = \frac{\square}{\square}$ .... (i)

$\sin^2\theta + \square = 1$ .... त्रिकोणमितीय नित्यसमानता

$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{40}{41}\right)^2 = 1$ .... (i) वरून

$\therefore \sin^2\theta + \frac{\square}{\square} = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{1600}{1681}$

$\therefore \sin^2\theta = \frac{\square - 1600}{1681}$

$\therefore \sin^2\theta = \frac{81}{1681}$

$\therefore \sin\theta = \frac{\square}{\square}$ .... वर्गमूळ घेऊन

7) जर $15\cos\theta - 8\sin\theta = 0$ तर $\text{cosec}\theta$ शोधण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

$15\cos\theta - 8\sin\theta = 0$ .... दिलेले

$\therefore 15\cos\theta = \square$

$\therefore \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\square}{\square}$ .... (i)

परंतु $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$ .... (ii)

समी (i) व (ii) वरून

$\therefore \cot\theta = \frac{\square}{15}$

आता,

$1 + \square = \text{cosec}^2\theta$ ...... त्रिकोणमितीय नित्यसमानता

$\therefore 1 + \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \text{cosec}^2\theta$

$\therefore 1 + \frac{64}{\square} = \text{cosec}^2\theta$

$\therefore \frac{225 + 64}{225} = \text{cosec}^2\theta$

$\therefore \frac{\square}{\square} = \text{cosec}^2\theta$

$\therefore \text{cosec}\theta = \frac{\square}{\square}$ ....वर्गमूळ घेऊन

8) दिलेल्या माहितीवरून लघुकोन θ ची किंमत काढण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

i) $3\sec 2\theta = 2\sqrt{3}$

$3\sec 2\theta = 2\sqrt{3}$ .... दिलेले

$\therefore \sec 2\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{\square}$

$\therefore \sec 2\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$

$\therefore \sec 2\theta = \dfrac{\square}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sec 2\theta = \sec 30^\circ$.... $\left(\because \sec 30^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore 2\theta = \square$

$\therefore \theta = \square$

ii) $4\cot 3\theta - 4 = 0$

$4\cot 3\theta - 4 = 0$ .... दिलेले

$\therefore 4\cot 3\theta = 4$

$\therefore \cot 3\theta = \dfrac{4}{\square}$

$\therefore \cot 3\theta = \square$

$\therefore \cot 3\theta = \cot 45^\circ$.... $(\because \cot 45^\circ = 1)$

$\therefore \square = 45^\circ$

$\therefore \theta = \left(\dfrac{45}{3}\right)^\circ$

$\therefore \theta = \square$

9) जर $\dfrac{\sin\theta + 1}{\sin\theta - 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2}$ यावरून $\tan\theta$ ची किंमत शोधण्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

$\dfrac{\sin\theta + 1}{\sin\theta - 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2}$ .... दिलेले

$\therefore \dfrac{(\sin\theta + 1) + (..............)}{(..............) - (\sin\theta - 1)} = \dfrac{(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3} + 2) - (\sqrt{3} - 2)}$ .... योग-वियोग क्रिया

$\therefore \dfrac{\sin\theta + 1 + \sin\theta - 1}{\sin\theta + 1 - \square + \square} = \dfrac{\sqrt{3} + 2 + \square - 2}{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2}$

$\therefore \dfrac{2\sin\theta}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\square}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\theta = \sin 60^\circ$....... $\left(\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \theta = \square$

$\therefore \tan\theta = \tan 60^\circ$

$\therefore \tan\theta = \square$

10) जर $\cos A = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$ तर सिद्ध करा की, $\operatorname{cosec} A = \frac{m+1}{m-1}$ त्यासाठी पुढील कृती पूर्ण करा.

$\sin^2 A + \square = 1$ .... त्रिकोणमितीय नित्यसमानता

$\therefore \sin^2 A + \left(\frac{2\sqrt{m}}{m+1}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2 A + \frac{\square}{(m+1)^2} = 1$

$\therefore \sin^2 A = 1 - \frac{4m}{(m+1)^2}$

$\therefore \sin^2 A = \frac{(m+1)^2 - 4m}{(m+1)^2}$

$\therefore \sin^2 A = \frac{\square - 4m}{(m+1)^2}$ .... $(m+1)^2$ चा विस्तार करून

$\therefore \sin^2 A = \frac{m^2 - 2m + 1}{(m+1)^2}$

$\therefore \sin^2 A = \frac{(\square)^2}{(m+1)^2}$

$\therefore \sin A = \frac{\square}{\square}$ .... वर्गमूळ घेऊन

परंतु $\sin A \times \square = 1$

$\therefore \frac{m-1}{m+1} \times \text{cosec}A = 1$

$\therefore \text{cosec}A = 1 \times \frac{\square}{\square}$

$\therefore \text{cosec}A = \frac{m+1}{m-1}$ हे सिद्ध झाले.

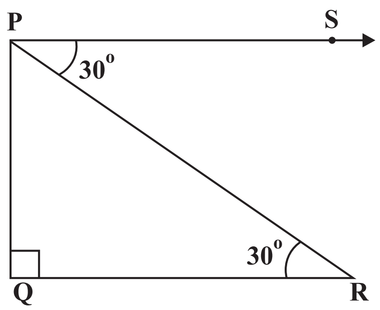
11) एका इमारतीच्या छतावरून राहुलने जमिनीवरील एका लक्ष्याचा वेध घेतला. राहुलने सोडलेला बाण सरळमार्गाने 5 मी प्रति सेकंद वेगाने 6 सेकंदात लक्ष्याचा वेध घेतो. बाणाचा मार्ग क्षितिज समांतर पातळीशी 30° मापाचा अवनत कोन करत असेल, तर ते लक्ष्य इमारतीपासून किती अंतरावर असेल?

रेख PQ ही इमारत, बिंदू R हे लक्ष्याचे स्थान, तर बिंदू P हे राहुलचे स्थान दर्शविते.

बाणाने लक्ष्यापर्यंत कापलेले अंतर $= \text{वेग} \times \square$

$\therefore PR = 5 \times 6$

$\therefore PR = 30$ मी



आकृतीमध्ये $\angle SPR = \angle \square = 30^\circ$......... व्युत्क्रम कोन

$\cos R = \frac{\square}{\text{कर्ण}}$ .... सूत्र

$\cos 30^\circ = \frac{QR}{\square}$

$\frac{\square}{\square} = \frac{QR}{30}$ .... $\cos 30^\circ$ ची किंमत ठेवून

$QR = \frac{\sqrt{3} \times \square}{2}$

$QR = \square$ मी

लक्ष्याचे इमारतीपासूनचे अंतर $\square$ मी आहे.

12) $q\tan\theta + p\sec\theta = x$
$p\tan\theta + q\sec\theta = y$

तर θ चे निरसन करा.

$q\tan\theta + p\sec\theta = x$ ...... (दिलेले)

$\therefore q^2\tan^2\theta + 2pq\tan\theta\sec\theta +$ [ ] $= x^2$.............. (i) (वर्ग करून)

$p\tan\theta + q\sec\theta = y$ ...... (दिलेले)

$\therefore$ [ ] $= y^2$.............. (ii) (वर्ग करून)

समीकरण (i) मधून समीकरण (ii) वजा करू

$q^2\tan^2\theta - p^2\tan^2\theta + p^2\sec^2\theta - q^2\sec^2\theta = x^2 - y^2$

$(q^2 - p^2)$ [ ] $+ (p^2 - q^2)\sec^2\theta = x^2 - y^2$

$-$ [( )] $\tan^2\theta + (p^2 - q^2)\sec^2\theta = x^2 - y^2$

$(p^2 - q^2)\sec^2\theta - (p^2 - q^2)\tan^2\theta = x^2 - y^2$

$(p^2 - q^2)$ [( )] $= x^2 - y^2$

$(p^2 - q^2) \times$ [ ] $= x^2 - y^2$............ ($\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$)

$p^2 - q^2 = x^2 - y^2$

सरावासाठी उदाहरणे

1) $\operatorname{cosec}3x = \dfrac{\cot 30^\circ + \cot 60^\circ}{1 + \cot 30^\circ \cdot \cot 60^\circ}$ तर x ची किंमत काढा.

2) सिद्ध करा. $\sin^2\theta \cdot \tan\theta + \cos^2\theta \cdot \cot\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta = \tan\theta + \cot\theta$

3) जर $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ तर सिद्ध करा की, $\tan\theta + \cot\theta = 1$

4) एका मनोऱ्याची उंची मोजण्यासाठी सुयशने जमिनीवरील A या ठिकाणापासून मनोऱ्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता तयार होणारा उन्नत कोन मोजला व त्याला आढळले की, $\tan A = \dfrac{3}{4}$ आहे. A हे ठिकाण मनोऱ्यापासून 40 मी. अंतरावर असेल तर मनोऱ्याची उंची काढा.

5) एका काटकोन त्रिकोणाच्या शिरोबिंदू A, B, C चे निर्देशक अनुक्रमे (0, 0), (0, 2) आणि (2, 2) आहेत. तर $\sin\angle BAC$ आणि $\sin\angle ACB$ ची किंमत काढा.

6) लघुकोन ΔABC मध्ये $\sin(A + B - C) = \dfrac{1}{2}$, $\cot(A - B + C) = 0$ आणि $\cos(B + C - A) = \dfrac{1}{2}$ तर $\angle A$, $\angle B$ आणि $\angle C$ ची मापे शोधा.

7. महत्त्वमापन

1) वर्तुळाचा परीघ व वर्तुळाचे क्षेत्रफळ यांचे संख्यात्मक गुणोत्तर 2 : 7 असेल, तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढण्याकरिता पुढील कृती पूर्ण करा.

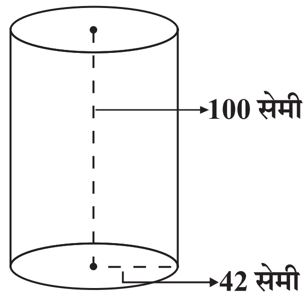
$$\frac{\text{वर्तुळाचा परीघ}}{\text{वर्तुळाचे क्षेत्रफळ}} = \frac{2}{7} \text{ .... पक्ष}$$

$$\therefore \frac{2\pi r}{\boxed{}} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore \frac{\boxed{}}{r} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore r = \boxed{} \text{ एकक}$$

2) शेजारील वृत्तचिती आकाराच्या पिंपाची त्रिज्या 42 सेमी व उंची 100 सेमी आहे, तर पिंपामध्ये किती लीटर पाणी मावेल हे काढण्याकरिता पुढील कृती पूर्ण करा.



वृत्तचिती आकाराच्या पिंपाचे घनफळ $= \boxed{}$ .... सूत्र

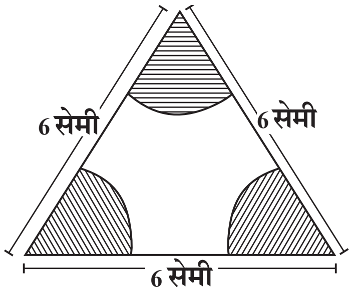
$= \frac{22}{7} \times \boxed{} \times \boxed{} \times 100$

$= \boxed{} \times 100 = \boxed{}$ घ.सेमी

(1 लीटर $= \boxed{}$ घ.सेमी)

$\therefore$ पिंपामध्ये $\boxed{}$ लीटर पाणी मावेल.

3) **आकृतीतील त्रिकोणाची प्रत्येक बाजू 6 सेमी आहे. त्रिकोणाचे शिरोबिंदू केंद्र समजून 2 सेमी त्रिज्येचे कंस काढले असता रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढण्याकरिता पुढील कृती पूर्ण करा.**



एका रेखांकित वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $= \square$

$= \frac{\square}{360} \times 3.14 \times \square \times \square$

$= \frac{1}{6} \times \square$

$= \square$ चौसेमी

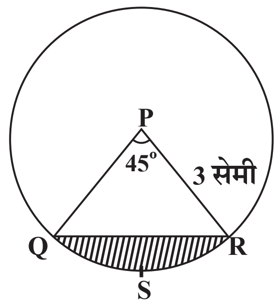
$\therefore$ संपूर्ण रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ $= 3 \times$ एका रेखांकित वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ

$= 3 \times \square$

$= \square$ चौसेमी

4) **आकृतीतील वर्तुळाचे केंद्र P व त्रिज्या 3 सेमी आहे. $\angle P = 45^\circ$, तर लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढण्याकरिता पुढील कृती पूर्ण करा.**

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70\right)$



वर्तुळखंड QSR चे क्षेत्रफळ $= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\square}{2}\right]$ .... सूत्र

$= (3)^2\left[\frac{3.14 \times \square}{360} - \frac{\square}{2}\right]$

$= 9\left[\frac{\square}{360} - \frac{\square}{2}\right]$

$= 9\left[0.393 - \square\right]$

$= 9 \; \square$

$= \square$ चौसेमी

5) **एका वृत्तचिती आकाराच्या टोकदार पेन्सिलीची एकूण लांबी 10 सेमी असून त्यातील शंक्वाकृती भागाची उंची 1 सेमी व पेन्सिलीचा व्यास 1 सेमी असल्यास पेन्सिलीचे एकूण पृष्ठफळ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा. ($\sqrt{1.25} \approx 1.12$)**

पेन्सिलची त्रिज्या = $\frac{1}{2}$ = ☐ सेमी

पेन्सिलच्या शंकूची तिरकस उंची (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{\square^2 + \square^2}$

$= \sqrt{\square}$

= ☐ सेमी

पेन्सिलचे एकूण पृष्ठफळ = शंकूचे वक्रपृष्ठफळ + वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ + वृत्तचितीच्या तळाचे क्षेत्रफळ

= ☐ + ☐ + πr^2 .... सूत्र

= $3.14 \times 0.5 \times$ ☐ $+ 2 \times 3.14 \times 0.5 \times$ ☐ $+ 3.14 \times 0.5 \times 0.5$

= ☐ + ☐ + 0.785

= ☐ चौसेमी

6) **शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार भागांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 16 सेमी व 8 सेमी आहेत व त्याची उंची 6 सेमी असल्यास शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ काढण्याकरिता खालील कृती पूर्ण करा.**

शंकूछेदाची तिरकस उंची (l) = ☐ .... (सूत्र)

= ☐ सेमी

शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ = ☐ .... (सूत्र)

= $3.14 \times 10 \times$ ☐

= ☐ चौसेमी

7) एका इष्टिकाचिती आकाराच्या हौदाची लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे 4.4 मी, 3.8 मी आणि 1.5 मी आहे. हा हौद 42 सेमी उंची व दोन्ही वर्तुळाकार बाजूच्या त्रिज्या 20 सेमी व 30 सेमी असणाऱ्या शंकूछेदाच्या आकाराच्या बादलीने पूर्ण भरावयाचा असल्यास पाण्याने काठोकाठ भरलेल्या किती बादल्या लागतील ते काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

हौदाची लांबी (l) = 4.4 मी. = 440 सेमी

हौदाची रुंदी (b) = ☐ सेमी

हौदाची उंची (h) = ☐ सेमी

हौदात मावणारे पाणी = हौदाचे घनफळ = ☐ .... (सूत्र)

$= 440 \times$ ☐ $\times 150$ घसेमी

एका बादलीत मावणारे पाणी = बादलीचे घनफळ (शंकूछेदाचे घनफळ)

$= \frac{1}{3}\pi h\ [r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2]$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times$ ☐ $\left[(20)^2 + (30)^2 + 20 \times 30\right]$

$= 44 \times$ ☐ घ.सेमी.

हौद भरण्यासाठी लागणाऱ्या बादल्यांची संख्या $= \dfrac{440 \times \square \times 150}{44 \times \square}$

= ☐

हौद भरण्यासाठी ☐ बादल्या पाणी लागेल.

8) जर घनाचे घनफळ 9.261 घसेमी असेल, तर त्या घनाचे एकूण पृष्ठफळ काढा.

9) जर 4 सेमी त्रिज्या असलेल्या धातूचा भरीव गोल वितळवून त्यापासून 0.2 सेमी व्यासाची तार तयार केली, तर त्या तारेची लांबी मीटरमध्ये काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

गोलाची त्रिज्या = ☐ सेमी

वृत्तचिती आकाराच्या तारेचा व्यास = ☐ सेमी

वृत्तचिती आकाराच्या तारेची त्रिज्या = ☐ सेमी

तारेचे घनफळ = गोलाचे घनफळ

$\therefore \pi r^2 h$ = ☐ .... (सूत्र)

$\therefore (0.1)^2 h = \frac{4}{3} \times$ ☐

$\therefore$ h = $\frac{☐}{☐}$

$\therefore$ h = ☐ सेमी

$\therefore$ तारेची लांबी = ☐ सेमी = ☐ मी

10) 11 सेमी, 21 सेमी व 36 सेमी लांबी, रुंदी व उंची असणाऱ्या धातूची इष्टिकाचिती वितळवून 18 सेमी उंचीचा शंकू तयार केला तर त्या शंकूच्या तळाची त्रिज्या शोधण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

इष्टिकाचितीचे घनफळ $= l \times b \times h$ .... (सूत्र)

= ☐

= ☐ घसेमी

शंकूचे घनफळ = ☐ .... (सूत्र)

$\therefore 8316 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times$ ☐ $\times 18$

$\therefore 441$ = ☐

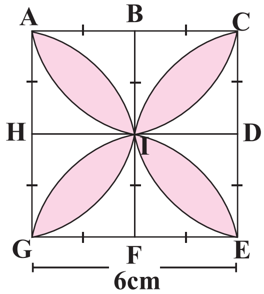
$\therefore$ r = ☐ सेमी

$\therefore$ शंकूच्या तळाची त्रिज्या = ☐ सेमी.

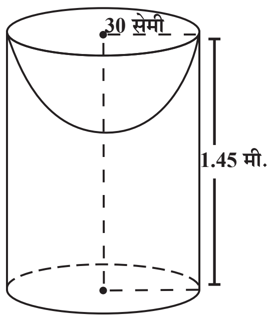
11) शेजारील इष्टिकाचिती आकाराच्या हौदामध्ये 21 सेमी व्यासाचा गोलाकार दगड आहे, तर हौदात किती लीटर पाणी मावेल ?

सरावासाठी उदाहरणे

1) चौरसांचे शिरोबिंदू केंद्र समजून आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे 3 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळकंस प्रत्येक चौरसात काढलेले आहेत, तर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



2) मयंकने चित्रात दाखविल्याप्रमाणे बागेत पक्ष्यांना अंघोळ करण्यासाठी (Bird Bath) वृत्तचिती आकाराचे आणि वरच्या टोकास अर्धगोलाकार आकार असलेले भांडे बनविले. भांड्याची उंची 1.45 मी. व त्रिज्या 30 सेमी असेल, तर भांड्याचे एकूण पृष्ठफळ काढा.



3) पाणी पिण्याच्या पेल्याची उंची 14 सेमी आहे. पेल्याच्या वरच्या व खालच्या वर्तुळाकृती पृष्ठाचा व्यास अनुक्रमे 4 सेमी व 2 सेमी आहे, तर पेल्याची धारकता काढा. तसेच ₹ 10 प्रति चौसेमी दराने पेल्याची किंमत काढा.

4) एका भरीव गोलाचे एकूण पृष्ठफळ 314 चौसेमी असेल तर त्याच्या अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ काढा.

श्रेयनामावली

करूया मैत्री गणिताशी : कार्यपुस्तिका : इयत्ता – दहावी
लेखन, निर्मिती व समीक्षण सहभाग

अ.क्र.	तज्ज्ञ सदस्यांचे नाव	पद	कार्यालय
१.	निलोफर पटेल	अधिव्याख्याता	जिल्हा शिक्षण व प्रशिक्षण संस्था, भंडारा.
२.	सुवर्णा देशपांडे	सहशिक्षक	न्यू इंग्लिश स्कूल, सातारा.
३.	भक्ती जोशी	माध्यमिक शिक्षक	जि. प. शाळा फुलंब्री, जि. औरंगाबाद.
४.	सचिन बटवाल	माध्यमिक शिक्षक	गुरुनानक हायस्कूल आणि ज्युनि. कॉलेज, पुणे.
५.	संजीव भोर	सहशिक्षक	रेणुका माता माध्यमिक विद्यालय रसे, ता. खेड, जि. पुणे.
६.	महेंद्र नेमाडे	सहशिक्षक	ए. टी. झांबरे विद्यालय, जळगाव.
७.	प्रमोद ठोंबरे	सहशिक्षक	आदर्श विद्यालय चिखली, ता. चिखली, जि. बुलढाणा.
८.	माधुरी मोने	सहशिक्षक	गुरुनानक हायस्कूल आणि ज्युनि. कॉलेज, पुणे.
९.	राजेंद्र चौधरी	सहशिक्षक	मॉडेल हायस्कूल नंदपूर, जि. वर्धा.
१०.	रामा वन्याळकर	सहशिक्षक	श्रीराम विद्यालय व ज्युनि. कॉलेज कोवाड, जि. कोल्हापूर.
११.	शिवप्रसाद म्हेत्रे	सहशिक्षक	श्री तुळजाभवानी विद्यालय, खडकी, जि. अहमदनगर.
१२.	जितेंद्र त्रिवेदी	सहशिक्षक	विद्या विकास मंदिर अवसरी बु., ता. आंबेगाव, जि. पुणे.
१३.	संदीप पंचभाई	माजी अभ्यास मंडळ सदस्य	नागपूर.
१४.	तरुबेन पोपट	सेवानिवृत्त मुख्याध्यापिका	पुणे.
१५.	राजेंद्र आफळे	सेवानिवृत्त शिक्षक	सातारा.

शिक्षकांसाठी सूचना : १) विद्यार्थ्यांना स्वयं–अध्ययनाची सवय आणि अध्ययन निष्पत्तीनिहाय प्रगती करण्याची संधी मिळावी या हेतूने ही कार्यपुस्तिका तयार करण्यात आली आहे. २) पाठ्यपुस्तकातील आशय किंवा पाठ्यांश शिकल्यावर विद्यार्थ्यांनी नियमितपणे कार्यपुस्तिकेतील कृती पूर्ण कराव्यात ही अपेक्षा आहे. ३) कार्यपुस्तिकेतील प्रत्येक कृती विशिष्ट क्षमतेवर आधारित असून शिक्षकांनी अध्ययन प्रक्रियेच्या अंतिम टप्प्यावर भर न देता प्रत्येक विद्यार्थी अपेक्षित क्षमता प्राप्त करू शकेल याकडे लक्ष द्यावे. ४) शैक्षणिक वर्षात प्रत्येक विद्यार्थी कार्यपुस्तिकेतील कृती पूर्ण करेल यासाठी शिक्षकांनी स्थानिक परिस्थितीनुरूप नियोजन करावे. ५) कार्यपुस्तिकेत कृतिपत्रिकांचा समावेश असून विद्यार्थी कृतिपत्रिका स्व–प्रयत्नांनी आकलन करून सोडवतील याकरिता प्राधान्य द्यावे. ६) शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना गरजेनुसार वैयक्तिक अथवा गटात मदत करावी. ७) गणिती संकल्पना मुलांमध्ये संक्रमित करताना, स्थानिक परिसरातून त्या संकल्पना मुले शिकू शकतील, अशा संधी निर्माण करण्याचा प्रयत्न शिक्षकांनी करावा. तसेच अशा संधी शोधण्यास मुलांना प्रोत्साहन द्यावे किंवा प्रवृत्त करावे. ८) विद्यार्थ्यांचे मूल्यांकन करणे हा या कार्यपुस्तिकेचा एकमेव उद्देश नसून गणिताची भीती दूर करून गणिताचा आनंद घेण्यासाठी शिकविणे हा आहे. ९) प्रत्येक मूल गणित शिकू शकते हा विश्वास मनात बाळगून शिक्षकांनी प्रत्येक विद्यार्थ्याला या कार्यपुस्तिकेच्या मदतीने अध्ययन–अध्यापन प्रक्रियेत सहभागी करून घ्यावे.